Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
1 de junio de 2014

Control 2 MA3801

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Camila Romero, Felipe Subiabre.

P1. Decimos que un espacio topológico X es **minimal-compacto** si todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tiene un subrecubrimiento minimal para la inclusión, es decir, un subrecubrimiento $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V} \setminus \{V\}$ no es un recubrimiento para todo $V \in \mathcal{V}$.

(a) Muestre que si X es compacto, entonces es minimal-compacto.

Solución. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X y sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{V}$ no tuviera un subrecubrimiento minimal, podríamos quitar un elemento de $\mathcal{V}$ formando un subrecubrimiento $\mathcal{V}_1 \subsetneq \mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Luego, como $\mathcal{V}_1$ no sería minimal, podríamos extraer quitar un elemento de $\mathcal{V}_1$, construyendo $\mathcal{V}_2 \subsetneq \mathcal{V}_1$ un subrecubrimiento de $\mathcal{U}$. Así, podríamos repetir este proceso indefinidamente, lo que contradiría la finitud de $\mathcal{V}$.

(b) Muestre que si X es discreto e infinito, entonces X no es minimal-compacto.

Solución. Sea $Y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ un subconjunto infinito numerable de X. Definamos

$$U_n \doteq (X \setminus Y) \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$$

que es abierto en X porque X es discreto. Claramente, $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto.

Veamos que $\mathcal{U}$ no tiene un subrecubrimiento minimal: sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ un subrecubrimiento. Notemos que $\mathcal{V}$ no puede ser finito: si lo fuese, tendríamos que $\mathcal{V} = \{U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}\}$ y tomando $n \doteq \text{máx}_k\{n_k\}$ obtendríamos que $\bigcup \mathcal{V} = U_n \neq X$. Luego, $\mathcal{V}$ es de la forma $\mathcal{V} = \{U_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con todos los índices n_k distintos. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, debe existir $k' \in \mathbb{N}$ tal que $n_k < n_{k'}$, pues todos los n_k son distintos y son infinitos. Así, $U_{n_{k'}} \in \mathcal{V} \setminus \{U_{n_k}\}$ y como $U_{n_k} \subseteq U_{n_{k'}}$ vemos que $\mathcal{V} \setminus \{U_{n_k}\}$ es un cubrimiento de X. Concluimos que $\mathcal{V}$ no puede ser minimal para la inclusión.

(c) Pruebe que si X es minimal-compacto, entonces es numerablemente compacto. Concluya que las nociones de compacidad y minimal-compacidad son equivalentes en espacios métricos.

Indicación. Recuerde que si X no es num. compacto, entonces existe $Y \subseteq X$ infinito con $Y' = \varnothing$.

Solución. Supongamos que X no es numerablemente compacto. Por la indicación, existe $Y \subseteq X$ infinito con $Y' = \varnothing$. Por la parte **(b)**, existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}'$ de Y que no tiene minimal para la inclusión.

Para cada $U' \in \mathcal{U}'$, existe $U \subseteq X$ abierto tal que $U \cap Y = U'$ por propiedad de la topología traza. Además, como $Y' = \varnothing$ se tiene que $\overline{Y} = Y \cup Y' = Y$, por lo que Y es cerrado. Definimos

$$\mathcal{U} \doteq \{(X \setminus Y) \cup U\}_{U'\in\mathcal{U}'}.$$

Veamos que $\mathcal{U}$ no tiene subrecubrimiento minimal: si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ lo fuese, claramente $\mathcal{V}' \doteq \{V \cap Y\}_{V\in\mathcal{V}}$ sería un subrecubrimiento de $\mathcal{U}'$. Además, $\mathcal{V}'$ sería minimal para la inclusión porque $X \setminus Y \subseteq V$ para todo $V \in \mathcal{V}$, con lo que obtendríamos una contradicción.

La conclusión es directa de la parte **(a)**, lo recién demostrado y del hecho que la compacidad y numerable compacidad son equivalentes en espacios métricos.

P2. Sea X un espacio topológico. Para $x \in X$ se define la **componente pseudo-conexa** $Q(x)$ de x como la intersección de todos los *clopen* (i.e., conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez) que contienen a x.

(a) Pruebe que $C(x) \subseteq Q(x)$ para todo $x \in X$, donde $C(x)$ es la componente conexa de x.

Solución. Sea $x \in X$ y $A \subseteq X$ un *clopen* con $x \in A$. Basta probar que $C(x) \subseteq A$. Si esto no fuese cierto, existiría $y \in C(x)$ con $y \notin A$. Luego, tendríamos que $x \in A$ e $y \in X \setminus A$, con A y $X \setminus A$ abiertos (porque A es *clopen*). Así, podríamos separar $C(x)$ mediante abiertos disjuntos cuya intersección con $C(x)$ es no vacía, lo que contradiría la conexidad de $C(x)$.

(b) Muestre que $\{Q(x)\}_{x\in X}$ define una partición de X.

Solución. Sea $x \in X$ e $y \in Q(x)$. Veamos que si A es un *clopen*, entonces $x \in A$ si y sólo si $y \in A$. En efecto, si A fuese un *clopen* que contiene a x no a y, tendríamos que $y \notin Q(x)$ porque $Q(x) \subseteq A$. Por otro lado, si A fuese un *clopen* que contiene a y y no a x, $X \setminus A$ sería un *clopen* que contiene a x y no a y, lo que contradiría lo anterior.

Como los conjuntos que participan en la intersección que define a $Q(x)$ y a $Q(y)$ son los mismos, concluimos que $Q(x) = Q(y)$.

Ahora, si $Q(x) \cap Q(y) \neq \varnothing$, entonces existe $z \in Q(x) \cap Q(y)$. Por lo anterior, $Q(x) = Q(z) = Q(y)$ y concluimos así que $\{Q(x)\}_{x\in X}$ define una partición de X.

(c) Sea $I_n = [0,1] \times \{1/n\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Considere

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

dotado de la topología inducida de $\mathbb{R}^2$. Muestre que existe $x \in X$ tal que $C(x) \subsetneq Q(x)$.

Solución. Veamos primero que $Q((0,0)) = \{(0,0),(1,0)\}$: sea A un *clopen* que contiene a $(0,0)$. Como A es abierto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(0,1/n) \in A$ para todo $n > N$. Si existiera $n > N$ tal que $I_n \not\subseteq A$, entonces existiría $t \in (0,1]$ tal que $(t,1/n) \in X \setminus A$. Luego, tendríamos que $(0,1/n) \in A$ y $(t,1/n) \in X \setminus A$, con A y $X \setminus A$ abiertos (porque A es *clopen*). Así, podríamos separar I_n mediante abiertos disjuntos cuya intersección con I_n es no vacía, lo que contradiría la conexidad de I_n.

Concluimos que $I_n \subseteq A$ para todo $n > N$. En particular, $(1,1/n) \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como A es cerrado, concluimos que $(1,0) \in A$. Así, $\{(0,0),(1,0)\} \subseteq Q((0,0))$.

Por otro lado, los conjuntos

$$J_N = \bigcup_{n>N} I_n \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,0)\} \subseteq X$$

son claramente *clopen* y se tiene que $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} J_N = \{(0,0),(1,0)\}$. Así, $Q((0,0)) = \{(0,0),(1,0)\}$.

Finalmente, por la parte **(a)** concluimos que $C((0,0)) \subseteq \{(0,0),(1,0)\}$. Como $\{(0,0),(1,0)\}$ no es conexo, $C((0,0))$ no puede ser igual a este conjunto y por consiguiente $C((0,0)) = \{(0,0)\}$. Así, $C((0,0)) \subsetneq Q((0,0))$.

P3. Sea I un conjunto de índices y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Definimos $X \doteq \prod_{i\in I} X_i$ dotado de la topología producto.

(a) Muestre que cada X_i es homeomorfo a un subespacio de X.

Solución. Sean $i \in I$ y $x \in X$ arbitrario y definamos $Y_i \doteq \{y \in X \mid y(j) = x(j) \quad \forall j \in I \setminus \{i\}\}$. La aplicación $\pi_i|_{Y_i} \colon Y_i \to X_i$ es claramente una biyección. Además, es continua porque π_i lo es. Veamos que es abierta: si $V \subseteq Y_i$ es un abierto en Y_i, entonces $V = U \cap Y$ con U abierto en X. Como π_i es abierta, $\pi_i(U)$ es abierto en X_i. Además, $\pi_i(U) = \pi_i(V) = \pi_i|_{Y_i}(V)$, por lo que $\pi_i|_{Y_i}$ es un homeomorfismo.

(b) Muestre que X es totalmente disconexo si y sólo si X_i es totalmente disconexo para cada $i \in I$.

Solución. Veamos primero que si cada X_i es totalmente disconexo, entonces X también lo es. Sea $C \subseteq X$ conexo e $i \in I$. Como la proyección canónica $\pi_i \colon X \to X_i$ es continua, $\pi_i(C)$ debe ser un conexo en X_i. Como X_i es totalmente disconexo, $\pi_i(C)$ debe ser un síngleton, digamos $\pi_i(C) = \{x_i\}$. Como además $C \subseteq \pi_i^{-1}(\pi_i(C))$, obtenemos que

$$C \subseteq \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\pi_i(C)) = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(\{x(i)\}) = \bigcap_{i\in I}\{x \in X \mid x(i) = x_i\} = \{(x_i)_{i\in I}\}.$$

Concluimos que C es un síngleton, por lo que X es totalmente disconexo.

Para la otra implicancia, por la parte **(a)**, basta ver que un subespacio de un espacio totalmente disconexo también es totalmente disconexo. Sea $Y \subseteq X$ y sea $i_Y : Y \to X$ la inyección canónica. Sea $C \subseteq Y$ conexo. Como i_Y es continua, $i_Y(C) = C$ debe ser conexo en X, pero como X es totalmente disconexo esto implica necesariamente que C es un síngleton. Concluimos que Y es totalmente disconexo.

(c) Muestre que X es $\mathrm{T}_{3,5}$ si y sólo si X_i es $\mathrm{T}_{3,5}$ para cada $i \in I$.

Solución. Veamos primero que si cada X_i es $\mathrm{T}_{3,5}$, entonces X también lo es. Sean $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado con $x \notin F$. Como $X \setminus F$ es abierto en X, existe U abierto de la subbase con $x \in U \subseteq X \setminus F$. Sabemos que U es de la forma

$$U = \prod_{i\in J} U_i \times \prod_{i\in I\setminus J} X_i$$

con $J \subseteq I$ finito y U_i abierto en X_i para todo $i \in J$. Notamos que $x(i) \in U_i$ para todo $i \in J$, por lo que $x(i) \notin X_i \setminus U_i$ para todo $i \in J$. Como $X_i \setminus U_i$ es cerrado en X_i, por la propiedad de ser $\mathrm{T}_{3,5}$ existe $f_i \colon X_i \to [0,1]$ continua con $f_i(x(i)) = 0$ y $f_i(y) = 1$ para todo $y \in X_i \setminus U_i$.

Definamos $f \colon X \to [0,1]$ por $f(y) = \text{máx}_{i\in J} f_i(y(i))$ y notemos que es continua. Se tiene que $f(x) = \text{máx}_{i\in J} f_i(x(i)) = 0$, mientras que $f(y) = \text{máx}_{i\in J} f_i(y(i)) = 1$ para todo $y \in X \setminus U$, por lo que en particular $f(y) = 1$ para todo $y \in F$. Concluimos que X es $\mathrm{T}_{3,5}$.

Para la otra implicancia, por la parte **(a)**, basta ver que un subespacio de un espacio $\mathrm{T}_{3,5}$ también es $\mathrm{T}_{3,5}$. Sea $Y \subseteq X$ y sea $x \in Y$ y $G \subseteq Y$ cerrado con $x \notin G$. Por propiedad de la topología traza, existe F cerrado en X tal que $G = F \cap Y$. Como $x \in Y$ y $x \notin G$, se tiene que $x \notin F$. Así, como X es $\mathrm{T}_{3,5}$ existe $f \colon X \to [0,1]$ continua con $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$. Claramente $g \doteq f|_Y \colon Y \to [0,1]$ es continua y además verifica que $g(x) = 0$ y $g(y) = 1$ para todo $y \in F$, con lo que finalmente concluimos lo que Y es $\mathrm{T}_{3,5}$.

P4. Sea X un espacio topológico T_4.

(a) Sea $D \subseteq X$ denso en X. Muestre que $c \leq \operatorname{card}(\mathcal{C}(X,\mathbb{R})) \leq \operatorname{card}(\mathcal{C}(D,\mathbb{R}))$.

Solución. Para la primera desigualdad, notamos que las funciones constantes de X en $\mathbb{R}$ son continuas.

Para la segunda desigualdad, notamos que si $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ son continuas y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$. En efecto, si $x \in X$ tomamos una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en D con $x_\lambda \to x$ y así

$$f(x) \leftarrow f(x_\lambda) = (f|_D)(x_\lambda) = (g|_D)(x_\lambda) = g(x_\lambda) \to g(x).$$

Como los límites son únicos en $\mathbb{R}$, esto implica que $f(x) = g(x)$ y así $f = g$.

Lo anterior muestra que el mapeo $f \mapsto f|_D$ de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ a $\mathcal{C}(X,D)$ es inyectivo, por lo que se obtiene la desigualdad.

(b) Muestre que si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces $\operatorname{card}(\mathcal{C}(F,\mathbb{R})) \leq \operatorname{card}(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}))$.

Solución. Sea $f \in \mathcal{C}(F,\mathbb{R})$. Por el teorema de extensión de Tietze, como X es T_4, existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ con $\tilde{f}|_F = f$. El mapeo $f \mapsto \tilde{f}$ es claramente inyectivo, pues si las funciones son distintas en F serán distintas en X. Concluimos así la desigualdad.

(c) Suponga ahora que $Y \subseteq X$ verifica $Y' = \varnothing$ y que X es separable. Pruebe que $\operatorname{card}(Y) < c$.

Indicación. Recuerde que si α es un cardinal infinito, entonces

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha & \beta < \alpha \\ 2^\alpha & \beta \geq \alpha \end{cases}$$

para cualquier cardinal $\beta > 0$.

Solución. Si X es separable, existe D denso numerable. Por la indicación, se tiene que

$$\operatorname{card}(\mathcal{C}(D, \mathbb{R})) \leq \operatorname{card}(\mathbb{R}^D) = c^{\aleph_0} = c$$

y de la parte **(a)** concluimos que

$$c \leq \operatorname{card}(\mathcal{C}(X, \mathbb{R})) \leq \operatorname{card}(\mathcal{C}(D, \mathbb{R})) = c,$$

por lo que $\operatorname{card}(X, \mathbb{R}) = c$.

Por otro lado, como $\overline{Y} = Y \cup Y' = Y$ notamos que Y es cerrado. Además, como Y es discreto, se tiene que todas las funciones de Y en $\mathbb{R}$ son continuas. De la parte **(b)**,

$$c^{\operatorname{card}(Y)} = \operatorname{card}(\mathbb{R}^Y) = \operatorname{card}(\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})) \leq c.$$

Nuevamente usando la indicación, vemos que si $\operatorname{card}(Y) \geq c$ entonces $c^{\operatorname{card}(Y)} = 2^c > c$, por lo que necesariamente $\operatorname{card}(Y) < c$.

P5. Sea ξ un ordinal límite, es decir, un ordinal que no tiene antecesor. Sea $X \doteq [0, \xi)$ dotado de la topología del orden. Recuerde que este espacio es Hausdorff.

(a) Muestre que $[\alpha, \beta]$ es compacto en X para cualquier $\alpha \leq \beta < \xi$.

Solución. Por lo visto en clases, basta probar que $[\alpha, \beta]$ es orden-completo. Sea entonces $A \subseteq [\alpha, \beta]$. Como X es bien-ordenado, A tiene mínimo, por lo que tiene ínfimo. Por otro lado, sabemos que $\bigcup A$ es el supremo de A en X, y, como $A \subseteq [\alpha, \beta]$, se tiene que $\bigcup A \in [\alpha, \beta]$, lo que implica que A tiene supremo en $[\alpha, \beta]$.

(b) Pruebe que X es localmente compacto y no compacto.

Indicación. Recuerde que para lo primero basta que todo $\beta \in X$ tenga **una** vecindad compacta.

Solución. Sea $\beta \in X$. Como ξ es un ordinal límite, $\beta + 1 \in X$. Sea $V = [0, \beta + 1]$, que es compacto por la parte **(a)** y claramente contiene a β. Notamos que $U = [0, \beta + 1)$ es abierto, $U \subseteq V$ y $\beta \in U$, por lo que V es una vecindad compacta de β. Así, X es localmente compacto.

Por otro lado, consideremos la red $(x_\alpha)_{\alpha \in X}$ dada por $x_\alpha = x$ para todo $\alpha \in X$. Para cualquier $\beta \in X$ se tiene que $[0, \beta + 1)$ es un abierto que contiene a β. Además, $x_\alpha \notin [0, \beta + 1)$ para todo $\alpha \geq \beta + 1$, por lo que β no es un punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha \in X}$. Concluimos así que X no es compacto.

(c) Sea $\tilde{X} = X \,\dot\cup\, \{\infty\}$ la compactificación de Alexandroff de X. Muestre que $\tilde{X}$ es homeomorfo a $[0, \xi]$.

Solución. Definimos la biyección $f \colon \tilde{X} \to [0, \xi]$ dada por $f(\beta) = \beta$ para todo $\beta \in [0, \xi)$ y $f(\infty) = \xi$. Veamos que f es continua: $f^{-1}(A) = A$ para todo $A \subseteq [0, \xi)$, por lo que la preimagen de cualquier abierto que no contenga a ξ es continua. Por otro lado,

$$f^{-1}((\beta, \xi]) = (\beta, \xi) \cup \{\infty\} = (X \setminus [0, \beta]) \cup \{\infty\}$$

y, como $[0, \beta]$ es compacto, vemos que $f^{-1}((\beta, \xi])$ es abierto en $\tilde{X}$.

Finalmente, como f es continua y biyectiva de un compacto a un Hausdorff, concluimos que es un homeomorfismo.