Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
18 de julio de 2012

Examen: Parte 1

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. **(a)** Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado tal que $\mathcal{T}|_F$ es la topología discreta. Supongamos que existe $D \subseteq X$ denso tal que $|\mathcal{P}(D)| \leq |F|$. Demuestre que $(X,\mathcal{T})$ no es normal.

Indicación. Argumente por contradicción y construya una función $f\colon \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(D)$ inyectiva.

Solución: Supongamos que X es normal. Como F está dotado de la topología discreta, si $A \subseteq F$ se tiene que A es cerrado en F. Además, como F es cerrado en X, todo cerrado de F es también cerrado en X y concluimos que todo subconjunto de F es cerrado en X. Dado $A \subseteq F$, tenemos que A y $F \setminus A$ son cerrados en X. Como X es normal, existen abiertos disjuntos O_A, O'_A en X tales que $A \subseteq O_A$ y $F \setminus A \subseteq O'_A$. Definamos la función $f\colon \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(D)$ por $f(A) = O_A \cap D$.

Veamos que f es inyectiva. Si $A, B \subseteq F$ distintos, entonces sin pérdida de generalidad existe $x \in A \setminus B$. Esto implica que $x \in F \setminus B$ y por lo tanto $x \in O'_B$. Como $O_A \cap O'_B$ es abierto y D es denso, existe $y \in O_A \cap O'_B \cap D$ y como $O_B \cap O'_B = \varnothing$ tenemos que $y \notin O_B$, por lo que $y \notin O_B \cap D$. Esto muestra que $y \in f(A)$ e $y \notin f(B)$, por lo que $f(A) \neq f(B)$ y f es inyectiva. Sigue que $|\mathcal{P}(F)| \leq |\mathcal{P}(D)|$, lo que contradice que $|\mathcal{P}(D)| \leq |F|$ (ya que $|F| < |\mathcal{P}(F)|$).

(b) Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico separado con infinitos puntos.

i) Pruebe que si X no posee puntos de acumulación, entonces existe una familia infinita numerable de abiertos disjuntos no vacíos.

ii) Pruebe que si X posee al menos un punto de acumulación, entonces existe una familia infinita numerable de abiertos disjuntos no vacíos.

iii) Construya una función $\Phi\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{T}$ inyectiva y concluya que $|\mathcal{T}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Solución:

i) Si x no es punto de acumulación, existe una vecindad abierta V de x tal que $V \cap (X \setminus \{x\}) = \varnothing$. Como $x \in V$, esto muestra que $V = \{x\}$, por lo que $\{x\}$ es abierto. Tomando cualquier conjunto infinito numerable $A \subseteq X$ tendremos entonces que $\{a\}_{a\in A}$ es una familia infinita numerable de abiertos disjuntos.

ii) Sea x un punto de acumulación de X. Sea $x_1 \neq x$ cualquiera. Como X es Hausdorff, existen abiertos U_1, V_1 tales que $x_1 \in U_1$, $x \in V_1$ y $U_1 \cap V_1 = \varnothing$.

Sea ahora $x_2 \in V_1 \setminus \{x\}$, que es no vacío pues x es punto de acumulación. Como X es separado, existen abiertos U_2, V_2 tales que $x_2 \in U_2$, $x \in V_2$ y $U_2 \cap V_2 = \varnothing$.

Teniendo $x_1, \ldots, x_n, V_1, \ldots, V_n, U_1, \ldots, U_n$ tomamos $x_{n+1} \in (\bigcup_{i=1}^n V_i) \setminus \{x\}$, que es no vacío pues x es punto de acumulación. Como X es Hausdorff, existen abiertos U_{n+1}, V_{n+1} tales que $x_{n+1} \in U_{n+1}$, $x \in V_{n+1}$ y $U_{n+1} \cap V_{n+1} = \varnothing$.

Definamos $O_n = \bigcap_{i=1}^n O_i$. Claramente $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia infinita numerable de abiertos no vacíos y encajonados. Además, $x_{n+1} \in O_n$ y $x_{n+1} \notin O_{n+1}$, por lo que los O_n son distintos. Como $x_{n+1} \in U_{n+1}$ y $U_{n+1} \cap O_{n+1} = \varnothing$, obtenemos que $x_{n+1} \notin \overline{O_{n+1}}$. Así, $O_n \setminus \overline{O_{n+1}}$ es un abierto no vacío. Concluimos tomando la familia $\{O_n \setminus \overline{O_{n+1}}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) De **(i)** y **(ii)** concluimos que en cualquier espacio separado con infinitos elementos existe una familia $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinita numerable de abiertos disjuntos no vacíos (se concluye que ocurre existan puntos de acumulación o no). Para $I \subseteq \mathbb{N}$, definamos $f(I) = \bigcup_{i\in I} O_i$. Veamos que f es inyectiva: si $I, J \subseteq \mathbb{N}$ con $I \neq J$, sin pérdida de generalidad existe $i \in I \setminus J$. Luego, $O_i \subseteq f(I)$. Además, como la famila es disjunta e $i \notin J$, se obtiene que $O_i \cap O_j = \varnothing$ para todo $j \in J$, por lo que $O_i \cap f(J) = \varnothing$. Como $O_i \neq \varnothing$, concluimos que $f(I) \neq f(J)$, por lo que f es inyectiva. Sigue que $|\mathcal{T}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

P2. Se dice que un espacio topológico T tiene ***tightness*** **numerable** si para todo conjunto $A \subseteq T$ y $x \in \overline{A}$ existe un conjunto numerable $S \subseteq A$ tal que $x \in \overline{S}$. Se dice que un espacio topológico T es **angelical** si dado $A \subseteq T$ y $x \in \overline{A}$ existe (x_n) en A tal que $x_n \to x$.

(a) El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado:

Teorema (Kaplansky). Si X es un espacio de Banach, $(X, \sigma(X, X^*))$ tiene *tightness* numerable.

Para ello siga como se indica.

i) Encuentre una sucesión creciente $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos en X^* tales que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = X^*$ y cada M_n es w^*-compacto.

ii) Tome $A \subseteq X$ y $a \in \overline{A}^w$. Fijando $n, m, k \in \mathbb{N}$ considere $x_1^*, \ldots, x_k^* \in M_n$ y una vecindad

$$V = \left\{ x \in X \;\middle|\; |\langle x_i^*, x - a\rangle| < \frac{1}{m} \quad \forall i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Pruebe que existe $a' \in V \cap A$, que el conjunto

$$U = \left\{ x^* \in M_n \;\middle|\; |\langle x^*, a' - a\rangle| < \frac{1}{m} \right\}$$

es abierto en (M_n, w^*) y que $x_i^* \in U$ para $i = 1, \ldots, k$.

iii) Pruebe que el conjunto U^k es vecindad abierta de $(x_1^*, \ldots, x_k^*)$ y así encuentre finitos conjuntos abiertos $W_1, \ldots, W_p$ de la forma $\{x^* \in M_n \mid |\langle x^*, s_i - a\rangle| < \frac{1}{m}\}$, con $s_i \in A$, que recubran M_n.

iv) Finalmente $W_1, \ldots, W_p$ nos entregan puntos $s_1, \ldots, s_p$ y tomamos $A_{(n,m,k)} = \{s_1, \ldots, s_p\}$ para construir el conjunto numerable que necesitábamos. Concluya el teorema.

Solución:

i) Sabemos, por el teorema de Banach-Alaoglu, que B^* es un conjunto w^*-compacto en X^*. Tomando $M_n = nB^*$ obtenemos la familia buscada (nB^* es w^* compacto porque la función $x \mapsto n \cdot x$ es w^*-w^* continua, ya que (X^*, w^*) es un e.v.t.).

ii) V es una vecindad débil porque es exactamente la semibola abierta para la topología débil definida por la familia finita $\{x_1^*, \ldots, x_k^*\}$ y $\varepsilon = \frac{1}{m}$ y centro a. Claramente $a \in V$ y, como $a \in \overline{A}^w$, obtenemos que $V \cap A \neq \varnothing$, es decir, que existe $a' \in V \cap A$. Por otro lado,

$$U = M_n \cap \left\{ x^* \in X^* \;\middle|\; |\langle x^*, a' - a\rangle| < \frac{1}{m} \right\},$$

donde el segundo conjunto corresponde exactamente a la semibola abierta para la topología débil-$*$ definida por la familia finita $\{a' - a\}$, $\varepsilon = \frac{1}{m}$ y centro 0. Luego, U es intersección de un w^*-abierto con M_n, por lo que es abierto en la topología de M_n inducida por la topología débil-$*$ de X^*.

iii) Tenemos que U es abierto en (M_n, w^*). Claramente $x_1^*, \ldots, x_k^* \in U$ (porque $a' \in V$), por lo que $(x_1^*, \ldots, x_k^*) \in U^k$. Además, U^k es un producto finito de abiertos, por lo que es abierto en la topología producto. Así, U^k es una vecindad de $(x_1^*, \ldots, x_k^*)$.
Como $x_1^*, \ldots, x_k^* \in M_n$ son arbitrarios, esto se puede hacer para cualquier k-tupla en M_n. Por otro lado, M_n^k es compacto porque (M_n, w^*) lo es (debido al teorema de Tychonoff). Si consideramos la familia de todos los conjuntos U^k (para cualquier k-tupla en M_n^k) obtenemos un recubrimiento abierto de un conjunto compacto, por lo que existen $s_1, \ldots, s_p \in A$ que verifican $M_n^k = \bigcup_{i=1}^p W_i^k$, con $W_i = \{x^* \in M_n \mid |\langle x^*, s_i - a\rangle| < \frac{1}{m}\}$. Esto significa que $M_n = \bigcup_{i=1}^p W_i$.

iv) Definamos $S = \bigcup_{n,m,k\in\mathbb{N}} A_{(n,m,k)}$ que es numerable pues es unión numerable de conjuntos finitos. Dada una familia finita $y_1^*, \ldots, y_k^*$ y $\varepsilon > 0$ tomamos n tal que $\max_{i=1,\ldots,k} \|y_i^*\| < n$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$, de modo que $y_1^*, \ldots, y_k^* \in M_n$. Como $\bigcup_{i=1}^p W_i^k = M_n^k$, existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $(y_1^*, \ldots, y_k^*) \in W_i^k$, es decir, tal que $|\langle y_j^*, s_i - a\rangle| < \frac{1}{m} < \varepsilon$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Esto muestra que s_i está en la semibola definida por esta familia y radio ε, por lo que $a \in \overline{S}^w$ y se concluye el resultado.

(b) Sea X un espacio de Banach y $K \subseteq X$ un conjunto w-compacto. Muestre que $(K, \sigma(X, X^*)|_K)$ es angelical.

Indicación. Si $A \subseteq K$ y $x \in \overline{A}^w$, considere S como el teorema anterior y $L = \overline{\langle S \rangle}$. Use la metrizabilidad de $K \cap L$.

Solución: Como $S \subseteq A \subseteq K$ y $S \subseteq \langle S \rangle \subseteq L$, tenemos que $S \subseteq K \cap L$. Además, $K \cap L$ es la intersección de un w-compacto con un w-cerrado (porque L es convexo y cerrado). Así, $K \cap L$ es w-cerrado y $\overline{S}^w \subseteq K \cap L$. Como $K \cap L$ es metrizable y $x \in \overline{S}^w$, existe una sucesión (x_n) en S tal que $x_n \to x$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
18 de julio de 2012

Examen: Parte 2

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P3. Sea X un espacio de Banach. El objetivo de este problema es demostrar el siguiente resultado:

Teorema (Eberlein-Šmulian). Sea $A \subseteq X$. Son equivalentes:

(i) A es w-compacto;

(ii) toda sucesión en A tiene una subsucesión w-convergente en A y

(iii) toda sucesión en A tiene una subred w-convergente en A.

Primero probaremos lo siguiente:

Lema (Eberlein-Šmulian). Sea $A \subseteq X$. Son equivalentes:

(i') $\overline{A}^w$ es w-compacto;

(ii') toda sucesión en A tiene una subsucesión w-convergente en X y

(iii') toda sucesión en A tiene una subred w-convergente en X.

Se propone el siguiente esquema de demostración:

(a) Suponga que A verifica **(i')** y considere una sucesión (a_n) en A e $Y = \overline{\langle \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle}$. Justifique que Y y B_Y son separables. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso numerable en B_Y, sea $x_n^* \in X^*$ tal que $\langle x_n^*, x_n \rangle = 1$ y muestre que $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ separa puntos en Y. Construya una subsucesión (b_n) de (a_n) tal que $\langle x_k^*, b_n \rangle$ es convergente en n para todo $k \in \mathbb{N}$ fijo. Muestre que (b_n) es w-convergente, lo que prueba que A verifica **(ii')**.

Solución: El conjunto $\langle \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle_{\mathbb{Q}}$ (combinaciones lineales finitas de elementos de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) es numerable y claramente denso en $\langle \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ que a su vez es denso en Y. Esto muestra que Y es separable. Además, como todo sub-espacio métrico de un espacio separable es separable, B_Y también es separable.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso numerable en B_Y y sea $x_n^* \in X^*$ tal que $\langle x_n^*, x_n \rangle = 1$ (existen porque podemos tomar cualquier elemento de X^* que no se anule en x_n y escalarlo. Existe algún elemento del dual que no se anula en x_n porque la topología débil es separada). Para ver que $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ separa puntos de Y basta ver que si $\langle x_n^*, x \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$ (porque si no separara puntos existirían $y \neq z$ tales que $\langle x_n^*, y \rangle = \langle x_n^*, z \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que es equivalente a que $\langle x_n^*, y - z \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que a su vez es equivalente a la existencia de tal x).

Si $\|x\| = 1$, existe x_n tal que $\|x - x_n\| < \frac{1}{2}$. Además,

$$1 - \langle x_n^*, x \rangle = \langle x_n^*, x_n \rangle - \langle x_n^*, x \rangle < \frac{1}{2}\|x\| = \frac{1}{2}$$

y así $\langle x_n^*, x \rangle > \frac{1}{2}$, por lo que no puede ocurrir que x_n^* se anule en x para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, esta famila separa puntos de Y.

Las sucesiones $(\langle x_k^*, a_n \rangle)_n$ son acotadas en $\mathbb{R}$ (ya que todo conjunto w-compacto es acotado y $A \subseteq \overline{A}^w$ que es w-compacto), por lo que existe (b_n) tal que $\langle x_k^*, b_n \rangle$ converge para todo $k \in \mathbb{N}$ fijo (argumento diagonal o teorema de Tychonoff).

Como $\overline{A}^w$ es w-compacto, (b_n) tiene un punto de acumulación. Si b, b' son puntos de acumulación de (b_n), entonces $\langle x_k^*, b \rangle = \langle x_k^*, b' \rangle$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que muestra que $b = b'$ pues $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ separa puntos. Si (b_n) no convergiera a b, entonces existiría $y^* \in X^*$ y una subsucesión (b_{n_k}) tal que $\langle y^*, b_{n_k} \rangle \to c \neq \langle y^*, b \rangle$. Por otro lado, (b_{n_k}) tiene como único punto de acumulación a b, lo que es una contradicción.

(b) Justifique que **(ii')** $\implies$ **(iii')**.

Solución: Como una subsucesión es una subred, si toda sucesión tiene una subsucesión convergente en X entonces también tiene una subred convergente en X.

(c) Suponga que A verifica **(iii')**. Muestre que A es acotado en X y que basta demostrar que $\overline{J(A)}^{w^*} \subseteq J(X)$ para concluir **(i')**. Procederemos por contradicción, suponiendo que existe $x^{**} \in \overline{J(A)}^{w^*} \setminus J(X)$. Sea $\delta \doteq d(x^{**}, J(X))$.

Construiremos inductivamente sucesiones (a_n) en A y (x_n^*) en B_{X^*} tales que

(I) $\langle x^{**}, x_n^* \rangle > \frac{3}{4}\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(II) $|\langle x_n^*, a_k \rangle| < \frac{1}{4}\delta$ para todo $k < n$ y

(III) $\langle x_n^*, a_k \rangle > \frac{3}{4}\delta$ para todo $k \geq n$.

Justifique que existe $x_1^* \in B_{X^*}$ tal que $\langle x^{**}, x_1^* \rangle > \frac{3}{4}\delta$. Luego, justifique que existe $a_1 \in A$ tal que $\langle x_1^*, a_1 \rangle > \frac{3}{4}\delta$.

Suponiendo que tenemos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ y $a_1, \ldots, a_n$ que verifican (I), (II) y (III), considere $\varphi \in X^{***}$ tal que $\|\varphi\| = 1$, φ se anula en $Y \doteq \overline{\langle \{J(a_i)\}_{1 \leq i \leq n} \rangle}$ y $\varphi(x^{**}) = d(x^{**}, Y)$ (existe por ejercicio 6). Use el teorema de Goldstine para aproximar φ por funciones de la forma $\langle \cdot, y^* \rangle \in X^{***}$ para construir x_{n+1}^* y a_{n+1} que verifiquen (I), (II) y (III).

Si (a_n) tuviera una subred (a_{n_λ}) tal que $a_{n_\lambda} \rightharpoonup a$, muestre que existe una combinación convexa de elementos de la subred a distancia menor a $\frac{\delta}{4}$ de a y use esto más (II) para obtener una contradicción con (III).

Solución: Si A no fuera acotado, existiría una sucesión (x_n) en A tal que $\|x_n\| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, toda subred de (x_n) es no acotada, por lo que no puede ser convergente (por Banach-Steinhaus, toda red convergente en la topología débil es acotada).

Supongamos que $\overline{J(A)}^{w^*} \subseteq J(X)$. Como $J(A)$ es acotado, $\overline{J(A)}^{w^*}$ también (pues las bolas de X^{**} son w^*-cerradas) por lo que está en una bola, que es w^*-compacta. Así, $\overline{J(A)}^{w^*}$ es w^*-cerrado en un w^*-compacto y es w^*-compacto. Como $J\colon (X, w) \to (J(X), w^*)$ es un homeomorfismo, aplicamos J^{-1} obteniendo que

$$J^{-1}\left(\overline{J(A)}^{w^*}\right) = \overline{J^{-1}(J(A))}^{w} = \overline{A}^{w}$$

es w-compacto. Esto muestra que basta demostrar que $\overline{J(A)}^{w^*} \subseteq J(X)$.

Como $J(X)$ es cerrado fuerte, $\delta > 0$. Además, $\|x^{**}\| = d(x^{**}, \{0\}) \geq d(x^{**}, J(X)) = \delta$, por lo que

$$\sup_{\substack{x^* \in B_{X^*} \\ x^* \neq 0}} \langle x^{**}, x^* \rangle \geq \delta$$

lo que implica que existe $x_1^* \in B_{X^*}$ tal que $\langle x^{**}, x_1^* \rangle > \frac{3}{4}\delta$. Tomemos $\varepsilon < \langle x^{**}, x_1^* \rangle - \frac{3}{4}\delta$. Como $x^{**} \in \overline{A}^{w^*}$, existe $a_1 \in A$ tal que $|\langle x^{**}, x_1^* \rangle - \langle x_1^*, a_1 \rangle| < \varepsilon$, lo que implica que $\langle x_1^*, a_1 \rangle > \frac{3}{4}\delta$. Tenemos que x_1^* y a_1 verifican (I) y (III) (también verifican (II) por vacuidad).

Suponiendo que tenemos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ y $a_1, \ldots, a_n$ que verifican (I), (II) y (III), sea φ como el enunciado. Notemos que $\langle \varphi, x^{**} \rangle = (x^{**}, Y) \geq d(x^{**}, X) = \delta$. Además, $\langle \varphi, J(a_i) \rangle = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Tomando la familia finita $\{J(a_1), \ldots, J(a_n), x^{**}\}$, $\varepsilon < \frac{\delta}{4}$, por el teorema de Goldstine aplicado a φ en X^{***} existe x_{n+1}^* tal que

$$|\langle \varphi, J(a_i) \rangle - \langle x_{n+1}^*, a_i \rangle| = |\langle x_{n+1}^*, a_i \rangle| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

y

$$|\langle \varphi, x^{**} \rangle - \langle x^{**}, x_{n+1}^* \rangle| < \varepsilon \implies |\langle x^{**}, x_{n+1}^* \rangle| > \langle \varphi, x^{**} \rangle - \varepsilon > \frac{3}{4}\delta,$$

lo que muestra que x_{n+1}^* verifica (I) y (II). Como $x^{**} \in \overline{A}^{w^*}$, existe $a_{n+1} \in A$ tal que

$$|\langle x^{**}, x_i^* \rangle - \langle x_i^*, a_{n+1} \rangle| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

con $\varepsilon < \min_{i=1,\dots,n} \langle x^{**}, x_i^* \rangle - \frac{3}{4}\delta$, por lo que se tiene (III).

Si (a_{n_λ}) fuera una subred de (a_n) con $a_{n_\lambda} \rightharpoonup a$, se tendría que $a \in \overline{\text{co}}(\{a_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda})$, ya que $\overline{\text{co}}(\{a_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda})$ es un convexo cerrado que contiene a la red y por lo tanto es un cerrado débil que contiene a la red, lo que implica que contiene a su límite. Como $\overline{\text{co}}(\{a_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}) = \overline{\text{co}(\{a_{n_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda})}$, podemos aproximar a en norma por combinaciones convexas finitas de elementos de la red. Así, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \Lambda$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i a_{n_{\lambda_i}} - a \right\| < \frac{\delta}{4}.$$

Tomando $n > n_{\lambda_1}, \dots, n_{\lambda_N}$, por (II) se tiene que

$$\left| \left\langle x_n^*, \sum_{i=1}^N \alpha_i a_{n_{\lambda_i}} \right\rangle \right| < \frac{\delta}{4}$$

y entonces

$$|\langle x_n^*, a\rangle| \leq \left| \left\langle x_n^*, \sum_{i=1}^N \alpha_i a_{n_{\lambda_i}} \right\rangle \right| + \left| \left\langle x_n^*, a - \sum_{i=1}^N \alpha_i a_{n_{\lambda_i}} \right\rangle \right| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}$$

lo que contradice (III).

(d) Use el lema y el hecho que todo w-compacto en X es angelical para la topología débil para concluir el teorema. Recuerde que si T es un espacio topológico, $A \subseteq T$ es angelical si para todo $x \in \overline{A}$ existe (x_n) en A tal que $x_n \to x$.

Si A verifica **(i)**, entonces verifica **(i')** y además es w-cerrado. Esto implica que verifica **(ii')** y, como es w-cerrado, que el límite de la subsucesión está en A, por lo que verifica **(ii)**.

Si A verifica **(ii)**, es directo que verifica **(iii)** (idéntico a la parte **(b)**).

Si A verifica **(iii)**, es directo que verifica **(iii')**, por lo que también cumple **(i')**. Basta ver que A es w-cerrado para concluir **(i)**. Si $x \in \overline{A}^w$, como $\overline{A}^w$ es w-compacto existe (x_n) en A tal que $x_n \rightharpoonup x$. Por **(iii)** esta sucesión tiene una subred convergente a $b \in A$. Como la sucesión original era convergente, la subred debe tener el mismo límite (ya que la topología débil es separada), por lo que $a = b$ y se concluye que A es w-cerrado.