Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
2 de mayo de 2014

Auxiliar 7 MA3801

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Camila Romero, Felipe Subiabre.

P1. El objetivo de este problema es mostrar que la propiedad de ser T_4 no necesariamente se hereda a sub-espacios ni pasa al producto. Para esto, siga los siguientes pasos:

(a) Muestre que si X es un espacio topológico T_4 e $Y \subseteq X$ es cerrado, entonces Y es T_4.

(b) Sea I un conjunto con $\mathrm{card}(I) > \aleph_0$. Se definen en $\mathbb{N}^I$ los conjuntos

$$F \doteq \{x \in \mathbb{N}^I \mid \mathrm{card}(x^{-1}(n)) \leq 1 \quad \forall n \neq 1\}$$
$$G \doteq \{x \in \mathbb{N}^I \mid \mathrm{card}(x^{-1}(n)) \leq 1 \quad \forall n \neq 2\}.$$

Muestre que F y G son cerrados en $\mathbb{N}^I$.

(c) Sean $U, V \subseteq \mathbb{N}^I$ abiertos tales que $F \subseteq U$, $G \subseteq V$. Construya inductivamente una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ y una secuencia estrictamente creciente de conjuntos finitos $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \subseteq \mathcal{P}(I)$ con $J_n = \{i_1^n, \ldots, i_{s(n)}^n\}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tales que

I) $i_k^n = i_k^m$ para todo $1 \leq k \leq s(n)$ y $m \geq n$;

II) $x_n(i_k^n) = k$ para todo $1 \leq k \leq s(n)$ y $n \in \mathbb{N}$ y $x_n(j) = 1$ para todo $j \in I \setminus J_n$ y

III) $[x_n]_{J_{n+1}} \subseteq U$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

donde $[x]_J \doteq \{y \in \mathbb{N}^I \mid y(j) = x(j) \quad \forall j \in J\}$, y use este hecho para probar que $U \cap V \neq \varnothing$.

(d) Usando la parte **(a)**, muestre que $\mathbb{R}^I$ no es T_4.

(e) Usando que $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ son homeomorfos, concluya que $[0,1]^I$ es T_4, pero que $(0,1)^I$ no lo es.

P2. Considere el espacio topológico (Ω, τ) dado por $\Omega \doteq \{p \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid p \text{ ultrafiltro de } \mathbb{N}\}$ y τ es la topología generada por $\mathcal{B} \doteq \{U_A\}_{A\subseteq\mathbb{N}}$, donde $U_A \doteq \{p \in \Omega \mid A \in p\}$.

(a) Muestre que Ω es Hausdorff.

(b) Pruebe que $\mathbb{N}$ es homeomorfo a al subconjunto de Ω dado por los ultrafiltros principales de $\mathbb{N}$. Así, podemos pensar que $\mathbb{N}$ es un sub-espacio topológico de Ω.

(c) Muestre que Ω es compacto y que $\mathbb{N}$ es denso en Ω. Concluya que Ω es una compactificación de $\mathbb{N}$.
Nota. Se puede probar que $\mathrm{card}(\Omega) = 2^c$. Luego, Ω es muchísimo más grande que $\mathbb{N}$.

P3. Sea X un espacio topológico que verifica que existe $d \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$ existen $U_x \subseteq X$, $V_x \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $\varphi_x \colon U_x \to V_x$ con φ_x un homeomorfismo. Muestre que X es T_1.

P4. Se quiere probar que todo espacio espacio métrico (X, d) es paracompacto. Para esto, considere un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ indexado por ordinales y defina para cada $n \in \mathbb{N}$

$$V_{\alpha,n} \doteq \bigcup_{(\alpha,n,x)\in\mathcal{A}} B(x, 2^{-n})$$

donde $(\alpha, n, x) \in \mathcal{A}$ si y sólo si

I) α es el menor ordinal tal que $x \in U_\alpha$;

II) $x \notin V_{\beta,k}$ para todo β y $k < n$ y

III) $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subseteq U_\alpha$

y pruebe que $\mathcal{V} \doteq \{V_{\alpha,n}\}_{\alpha,n}$ es un refinamiento localmente finito de $\{U_\alpha\}_\alpha$.