

Control 1 MA3801

Profesor: Aris Daniilidis.

Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Camila Romero, Felipe Subiabre.

P1. Sea (X, d_1) un espacio métrico e (Y, d_2) un espacio métrico compacto. Se define la función

$$\begin{aligned} \rho_2: (X \times Y) \times (X \times Y) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2}. \end{aligned}$$

(a) Muestre que ρ_2 es una métrica en $X \times Y$.

Solución.

- Es claro que $\rho_2 \geq 0$.
- Sean $x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$. Notemos que

$$\begin{aligned} \rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= 0 \\ \iff \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2} &= 0 \\ \iff d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2 &= 0 \\ \iff d_1(x_1, x_2)^2 = 0 \wedge d_2(y_1, y_2)^2 &= 0 \\ \iff d_1(x_1, x_2) = 0 \wedge d_2(y_1, y_2) &= 0 \\ \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 & \\ \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) & \end{aligned}$$

donde la penúltima equivalencia sale de que d_1 y d_2 son métricas.

- Sean $x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$. Notemos que

$$\begin{aligned} \rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2} \\ &= \sqrt{d_1(x_2, x_1)^2 + d_2(y_2, y_1)^2} \\ &= \rho_2((x_2, y_2), (x_1, y_1)), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se desprende de la simetría de d_1 y d_2 .

- Sean $x_1, x_2, x_3 \in X, y_1, y_2, y_3 \in Y$. Denotamos por $\|\cdot\|_2$ la norma euclidiana usual en $\mathbb{R}^2$. Notemos que

$$\begin{aligned} \rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2} \\ &\leq \sqrt{(d_1(x_1, x_3) + d_1(x_3, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_3) + d_2(y_3, y_2))^2} \\ &= \|(d_1(x_1, x_3) + d_1(x_3, x_2), d_2(y_1, y_3) + d_2(y_3, y_2))\|_2 \\ &= \|(d_1(x_1, x_3), d_2(y_1, y_3)) + (d_1(x_3, x_2), d_2(y_3, y_2))\|_2 \\ &\leq \|(d_1(x_1, x_3), d_2(y_1, y_3))\|_2 + \|(d_1(x_3, x_2), d_2(y_3, y_2))\|_2 \\ &= \sqrt{d_1(x_1, x_3)^2 + d_2(y_1, y_3)^2} + \sqrt{d_1(x_3, x_2)^2 + d_2(y_3, y_2)^2} \\ &= \rho_2((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + \rho_2((x_3, y_3), (x_2, y_2)), \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad se usó la desigualdad triangular de d_1 y d_2 y en la segunda desigualdad se usó la desigualdad triangular de $\|\cdot\|_2$.

(b) Dada $f: X \rightarrow Y$, se define

$$\Gamma(f) \doteq \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Muestre que $\Gamma(f)$ es cerrado en $(X \times Y, \rho_2)$ si y sólo si f es continua.

Solución.

Primero notemos que

$$\rho_2((x_n, y_n), (x, y)) \rightarrow 0 \iff d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \wedge d_2(y_n, y) \rightarrow 0.$$

En efecto, si $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$ y $d_2(y_n, y) \rightarrow 0$ se tiene que $d_1(x_n, x)^2 \rightarrow 0$ y $d_2(y_n, y)^2 \rightarrow 0$, lo que implica que $\rho((x_n, y_n), (x, y)) \rightarrow 0$. Por otro lado, si $\rho((x_n, y_n), (x, y)) \rightarrow 0$ obtenemos que $d_1(x_n, x)^2 + d_2(y_n, y)^2 \rightarrow 0$, lo que implica que $d_1(x_n, x)^2 \rightarrow 0$ y $d_2(y_n, y)^2 \rightarrow 0$ por la positividad de los términos y el teorema del sándwich.

- Supongamos que f es continua. Sea $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en $\Gamma(f)$ convergente a $(x, y) \in X \times Y$. Tenemos entonces que $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$, lo que implica que $d_2(f(x_n), f(x)) \rightarrow 0$, ya que f es continua. Por la unicidad del límite, concluimos que $y = f(x)$ y así $(x, y) \in \Gamma(f)$.
- Supongamos ahora que f no es continua, es decir, que existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X con $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$ y tal que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$. Esto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $m_k > k$ con $d_2(f(x_{m_k}), f(x)) > \varepsilon$. Tomando $n_1 = m_1$ y $n_{k+1} = m_{n_k}$ obtenemos una sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ estrictamente creciente de naturales que verifica $d_2(f(x_{n_k}), f(x)) > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de Y , existe una subsucesión $f(x_{n_{k_j}})$ convergente a $y \in Y$, con $y \neq f(x)$. Luego $(x_{n_{k_j}}, f(x_{n_{k_j}}))$ converge a $(x, y) \notin \Gamma(f)$, lo que muestra que $\Gamma(f)$ no es cerrado.

(c) ¿Es necesaria la compacidad de Y ?

Solución.

Es necesaria para una de las implicancias. En efecto, notemos que la demostración de que si f es continua entonces el $\Gamma(f)$ es cerrado expuesta en la parte anterior no utiliza la compacidad de Y .

Por otro lado, consideremos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

donde $\mathbb{R}$ está dotado de la métrica usual $|\cdot|$. Notemos que f no es continua, pero sí lo es al restringir su dominio a $(0, \infty)$ o a $(-\infty, 0)$. Además,

$$\Gamma(f) = \Gamma(f|_{(-\infty, 0)}) \cup \{(0, 0)\} \cup \Gamma(f|_{(0, \infty)}),$$

lo que es directo de la definición de Γ . Luego, $\Gamma(f)$ se puede escribir como una unión finita de cerrados, lo que muestra que es cerrado.

P2. Sea (X, d) un espacio métrico con $\text{card}(X) \leq \aleph_0$.

(a) Muestre que X es de segunda categoría si y sólo si $X \setminus X' \neq \emptyset$.

Solución.

Notemos primero que $X \setminus X'$ es el conjunto de los puntos aislados de X .

- Si X tiene un punto aislado, digamos $x \in X$, entonces ningún cerrado que contenga a x puede tener interior vacío. Así, X no se puede escribir como unión de cerrados de interior vacío, por lo que X es de segunda categoría.

- Si X no tiene puntos aislados, entonces $\{x\}$ tiene interior vacío para todo $x \in X$. Luego, como

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

y como $\text{card}(X) \leq \aleph_0$, se obtiene que X se puede escribir como unión numerable de cerrados de interior vacío, lo que muestra que X es de primera categoría.

En lo que sigue, suponga adicionalmente que (X, d) es completo y que $\text{card}(X) = \aleph_0$.

- (b) Muestre que $X \setminus X'$ es un G_δ denso infinito en X .

Solución.

Notemos que

$$X \setminus X' = \bigcap_{x \in X'} (X \setminus \{x\}).$$

Como $\text{card}(X) = \aleph_0$, esto muestra que $X \setminus X'$ es G_δ . Además, si $x \in X'$ entonces $X \setminus \{x\}$ es denso en X por la definición de X' . Del teorema de Baire, obtenemos que $X \setminus X'$ es también denso en X . Finalmente, $X \setminus X'$ debe ser infinito porque al quitar un punto aislado el espacio sigue siendo completo y de cardinal $\aleph_0$ y podemos repetir este proceso indefinidamente.

Nota. $X \setminus X'$ es abierto ya que

$$X \setminus X' = \bigcup_{x \in X \setminus X'} \{x\}$$

y $\{x\}$ es abierto para todo $x \in X \setminus X'$ al ser éste el conjunto de los puntos aislados de X .

- (c) Suponga que (X, d) es además compacto. Muestre que existe un ordinal λ tal que $X^{(\lambda)} = \emptyset$ y que además el mínimo ordinal λ con esta propiedad verifica $\text{card}(\lambda) \leq \aleph_0$, $\lambda = \gamma + 1$, es decir, muestre que el índice de Cantor-Bendixson de X , λ , es un ordinal sucesor finito o numerable con $X^{(\lambda)} = \emptyset$.

Nota. Recuerde que se define $X^{(0)} \doteq X$, $X^{(\alpha+1)} \doteq (X^{(\alpha)})'$ y

$$X^{(\beta)} \doteq \bigcap_{\alpha < \beta} X^{(\alpha)}$$

para un ordinal límite β . Recuerde además que el índice de Cantor-Bendixson de X es el mínimo ordinal λ con $X^{(\lambda)} = X^{(\lambda+1)}$.

Solución.

Probaremos que $X^{(\alpha)}$ es compacto para todo ordinal α . Procedemos por inducción:

- Se tiene el caso base, pues $X^{(0)} = X$ es compacto.
- Supongamos que $X^{(\alpha)}$ es compacto. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$. Esta sucesión debe tener un punto de acumulación $x \in X^{(\alpha)}$, pues $X^{(\alpha)}$ es compacto. Notamos que x no puede ser un punto aislado de $X^{(\alpha)}$, por lo que $x \in X^{(\alpha+1)}$ y así $X^{(\alpha+1)}$ es compacto.
- Supongamos que β es un ordinal límite y que $X^{(\alpha)}$ es compacto para todo $\alpha < \beta$. Luego, $X^{(\alpha)}$ es cerrado en X para todo $\alpha < \beta$ y por lo tanto $X^{(\beta)}$ también lo es, al ser intersección de cerrados. Concluimos que $X^{(\beta)}$ es compacto, porque es un conjunto cerrado en un compacto.

(Estos conjuntos son compactos, pero eventualmente son vacíos.)

Como $(X^{(\alpha)})_\alpha$ es una secuencia decreciente de conjuntos, es claro que $\text{card}(X^{(\alpha)}) \leq \aleph_0$ para todo ordinal α . Así, por la parte (a) tenemos que

$$X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)} \setminus (X^{(\alpha)})' \neq \emptyset$$

para todo ordinal α tal que $X^{(\alpha)}$ es no vacío. Luego, existe λ con $X^{(\lambda)} = \emptyset$ y supongamos que λ es el mínimo con esta propiedad.

Si $\text{card}(\lambda) > \aleph_0$, como $X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)} \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \lambda$ podemos definir una función f tal que a todo ordinal $\alpha \in [0, \lambda)$ le asocia $f(\alpha) \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$. Como $(X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)})_\alpha$ es una secuencia disjunta, vemos que f es inyectiva y así $\text{card}(X) \geq \text{card}(f([0, \lambda))) = \text{card}(\lambda) > \aleph_0$, lo que es una contradicción.

Finalmente, si λ fuese un ordinal límite, como $\text{card}([0, \lambda)) = \text{card}(\lambda) \leq \aleph_0$ tendríamos que una secuencia decreciente y numerable de cerrados encajonados no vacíos en X tiene intersección vacía, lo que contradiría que toda familia de cerrados en X con la PIF tiene intersección no vacía.

P3. Sea $X \doteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Se define $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$\rho(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{1}{\eta(x, y)} & x \neq y \\ 0 & x = y, \end{cases}$$

donde $\eta(x, y) \doteq \min\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq y(k)\}$.

(a) Muestre que ρ es una métrica X .

Solución.

- Claramente, $\rho \geq 0$.
- Sean $x, y \in X$. Notemos que si $x = y$ se tiene por definición que $\rho(x, y) = 0$. Por otro lado, si $x \neq y$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x(k) \neq y(k)$, por lo que $\eta(x, y) \leq k$ y así $\rho(x, y) \geq 1/k > 0$.
- Sean $x, y \in X$. Si $x = y$, se tiene que $y = x$ por lo que $\rho(x, y) = 0 = \rho(y, x)$. Si $x \neq y$, es claro que

$$\eta(x, y) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq y(k)\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid y(k) \neq x(k)\} = \eta(y, x),$$

por lo que $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

- Sean $x, y, z \in X$. Si $x = y$, es claro que

$$\rho(x, y) = 0 \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Supongamos entonces que $x \neq y$ y sea $k = \eta(x, y)$. Consideremos dos casos:

- Si $\eta(x, z) \leq k$, entonces $\eta(x, z) \geq 1/k = \rho(x, y)$, por lo que $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.
- Si $\eta(x, z) > k$, entonces $x(k) = z(k)$ y como $x(k) \neq y(k)$ concluimos que $z(k) \neq y(k)$. Así, se tiene que $\eta(z, y) \leq k$ por lo que $\rho(z, y) \geq 1/k$, lo que muestra que $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

(b) Sea $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Muestre que $\rho(x^n, x) \rightarrow 0$ si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x^n(j) = x(j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ con $j \leq k$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$.

Solución.

Sean $x, y \in X$ y $k \in \mathbb{N}$. Veamos primero que $\rho(x, y) < 1/k$ si y sólo si $x(j) = y(j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ con $j \leq k$.

- Si $\rho(x, y) < 1/k$, consideramos dos casos:
 - si $\rho(x, y) = 0$, entonces $x = y$ y claramente $x(j) = y(j)$ para todo $1 \leq j \leq k$ y
 - si $\rho(x, y) > 0$, entonces $\eta(x, y) > k$ y por lo tanto $x(j) = y(j)$ para todo $1 \leq j \leq k$.
- Si $x(j) = y(j)$ para todo $1 \leq j \leq k$, consideramos dos casos:
 - si $x = y$, entonces claramente $0 = \rho(x, y) < 1/k$ y
 - si $x \neq y$, tenemos que $\eta(x, y) > k$, por lo que $\rho(x, y) < 1/k$.

Notemos que $\rho(x^n, x) \rightarrow 0$ si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x^n, x) < 1/k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ y que eso último es equivalente a que para todo $k \in \mathbb{N}$ exista $N \in \mathbb{N}$ tal que $x^n(j) = x(j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ con $j \leq k$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$.

(c) Muestre que (X, ρ) es completo.

Solución.

Sea $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x^n, x^m) < 1/k$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq N_k$. Tenemos entonces que $x^n(j) = x^m(j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ con $j \leq k$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N_k$. Es claro que podemos elegir los $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ estrictamente crecientes, de modo que $(x^{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sea una subsucesión de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sea $x \in X$ dado por $x(j) = x^{N_j}(j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Veamos primero que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $x(j) = x^{N_k}(j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ con $j \leq k$. En efecto sea j como antes. Como $N_j \leq N_k$ tenemos que $\rho(x^{N_j}, x^{N_k}) < 1/j$, por lo que $x(j) = x^{N_j}(j) = x^{N_k}(j)$.

Lo anterior es equivalente a que $\rho(x^{N_k}, x) < 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que muestra que $\rho(x^{N_k}, x) \rightarrow 0$. Así, $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación y como es de Cauchy debe converger a ese punto.

(d) Muestre que la métrica ρ es equivalente a la métrica usual en el producto cuando $\mathbb{N}$ está dotado de la métrica discreta.

Solución.

Llamemos $d: X \rightarrow X$ a la métrica usual en el producto, es decir,

$$d(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^j} \min\{d'(x(j), y(j)), 1\}$$

donde $d': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es la métrica discreta estándar en $\mathbb{N}$. Notemos que como $0 \leq d' \leq 1$, esto se puede reescribir como

$$d(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{d'(x(j), y(j))}{2^j} = \sum_{x(j) \neq y(j)} \frac{1}{2^j}.$$

Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \supseteq B_\rho(x, \delta)$ y que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\rho(x, \varepsilon) \supseteq B_d(x, \delta)$, donde B_d denota la bola con la métrica d y B_ρ la bola con la métrica ρ .

- Sea $\varepsilon > 0$ y veamos que existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \supseteq B_\rho(x, \delta)$. En efecto, notemos que $\sum_{j \geq k} \frac{1}{2^j} = 2^{-(k-1)}$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-(k-1)} < \varepsilon$. Así, tomando $0 < \delta < 1/k$ tenemos que si $y \in B_\rho(x, \delta)$ entonces $x(j) = y(j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ con $j \leq k$. Por lo tanto,

$$d(x, y) = \sum_{x(j) \neq y(j)} \frac{1}{2^j} \leq \sum_{k \geq j} \frac{1}{2^j} = 2^{-(k-1)} < \varepsilon,$$

por lo que $y \in B_d(x, \varepsilon)$.

- Sea $\varepsilon > 0$ y veamos que existe $\delta > 0$ tal que $B_\rho(x, \varepsilon) \supseteq B_d(x, \delta)$. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon$ y $0 < \delta < 2^{-(k-1)}$. Notemos que si $y \in B_d(x, \delta)$ entonces

$$d(x, y) = \sum_{x(j) \neq y(j)} \frac{1}{2^j} < 2^{-(k-1)}.$$

Si $j \in \mathbb{N}$ con $j \leq k$, entonces $2^{-j} > 2^{-(k-1)}$, por lo que necesariamente $x(j) = y(j)$. Concluimos que $\rho(x, y) < 1/k$ y por lo tanto que $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$.