

Auxiliar 4 MA3801

Profesor: Aris Daniilidis.

Auxiliar: Rodolfo Gutiérrez, Camila Romero, Felipe Subiabre.

P1. Sea (X, d) un espacio métrico. Muestre que F es cerrado en X si y sólo si para todo K compacto en X se tiene que $K \cap F$ es cerrado.

P2. Sea K un espacio métrico compacto. Muestre que $\dim \mathcal{C}(K) < \infty$ si y sólo si K es finito.

P3. Muestre que $\mathbb{R}$ no se puede particionar en numerables conjuntos cerrados.

Indicación. Proceda por contradicción, suponiendo que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ con cada F_n cerrado en $\mathbb{R}$. Defina $B_n = \partial F_n$ y pruebe que cada B_n tiene interior vacío en B para llegar a una contradicción.

P4. Muestre que si K es compacto, entonces $\mathcal{C}(K)$ es un espacio de Banach.

Indicación. Use que $\ell^\infty(K)$ es completo.

P5. El objetivo de este problema es demostrar que toda función $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ se puede escribir como suma de dos funciones continuas y no diferenciables en todo punto de $[0, 1]$. Para ello debe hacer lo siguiente:

- (a) Demuestre que el conjunto $\mathcal{F} \doteq \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(0) = 0 \text{ y } f(1) = 1\}$ es cerrado en $\mathcal{C}([0, 1])$.
- (b) Construiremos una función $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y nunca diferenciable. Para ello considere la función $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ definida por

$$\psi(f)(x) \doteq \begin{cases} \frac{3}{4}f(3x) & \text{para } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f(2-3x) & \text{para } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}f(3x-2) & \text{para } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Demuestre que ψ está bien definida, es decir, que $\psi(f) \in \mathcal{F}$ para todo $f \in \mathcal{F}$, y que existe una única función h tal que $\psi(h) = h$. Pruebe además por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo entero $1 \leq k \leq 3^n$ se tiene que $|h(\frac{k-1}{3^n}) - h(\frac{k}{3^n})| \geq 2^{-n}$.

Concluya que h es nunca diferenciable.

(c) Pruebe que las funciones continuas y lineales a trozos son densas en $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

(d) Para cada natural $n \in \mathbb{N}$ se definen los conjuntos

$$C_n \doteq \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid \exists t \in [0, 1 - 1/n] \text{ tal que } \forall h \in (0, 1 - t), |f(x+h) - f(x)| \leq nh\}.$$

Pruebe que los conjuntos C_n son cerrados. Análogamente se definen los conjuntos

$$D_n \doteq \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid \exists t \in [1/n, 1] \text{ tal que } \forall h \in (0, t), |f(x-h) - f(x)| \leq nh\}.$$

Demuestre que D_n es cerrado y que $G_n \doteq \mathcal{C}([0, 1]) \setminus (C_n \cup D_n)$ es un abierto denso.

(e) Pruebe que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $G \subseteq X$ es un G_δ denso, entonces todo elemento $x \in X$ puede escribirse como $x = g_1 + g_2$ donde $g_1, g_2 \in G$.

Indicación. Dado $x \in X$ considere el conjunto $G_x \doteq x - G$ y muestre que es G_δ denso.

(f) Concluya.