Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
28 de mayo de 2014

Auxiliar Extra C2 MA3801

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Camila Romero, Felipe Subiabre.

P1. Considere un conjunto X con $\text{card}(X) > \aleph_0$. Dotamos a X de la topología co-numerable, es decir,

$$\tau \doteq \{U \subseteq X \mid \text{card}(X \setminus U) \leq \aleph_0\} \cup \{\varnothing\}.$$

Muestre que X es conexo, pero que los únicos subconjuntos de X que son conexos por caminos son los síngleton.

Indicación. Puede ser útil mostrar que los únicos conjuntos compactos en X son los conjuntos finitos.

P2. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos primer-contables. Definimos $X \doteq \prod_{i\in I} X_i$ dotado de la topología producto.

- **(a)** Suponga que $\text{card}(I) = \aleph_0$. Muestre que X es primer-contable.
- **(b)** Suponga ahora que $\text{card}(I) > \aleph_0$ y que cada X_i es Hausdorff y contiene al menos dos puntos. Muestre que X no es primer-contable.

P3. Decimos que un espacio topológico X es **pseudocompacto** si cada función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ es acotada. Muestre que si X es métrizable, entonces la compacidad y la pseudocompacidad son equivalentes.

Indicación. Recuerde que si X no es compacto, entonces existe $Y \subseteq X$ infinito con $Y' = \varnothing$.

P4. Para un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y no compacto X, denotamos por $\tilde{X}$ a su compactificación de Alexandroff. Muestre que:

- **(a)** si $X = \mathbb{N}$, $\tilde{X}$ es homeomorfo a $\{0\} \mathbin{\dot\cup} \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- **(b)** si $X = (0,1)$, $\tilde{X}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ y
- **(c)** si $X = (0,1) \mathbin{\dot\cup} (2,3)$, $\tilde{X}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{S}^1 + 2)$.

P5. Sea X un espacio topológico Hausdorff con infinitos puntos.

- **(a)** Pruebe que si $X' = \varnothing$, entonces existe una familia infinita numerable de abiertos disjuntos no vacíos en X.
- **(b)** Pruebe que si $X' \neq \varnothing$, entonces existe una familia infinita numerable de abiertos disjunto no vacíos en X.
- **(c)** Concluya que la cardinalidad de los abiertos de X es al menos c.