Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
26 de abril de 2012

Trabajo Dirigido 2: Topologías, Bases y Vecindades

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. **(a)** Dado un conjunto X y $x \in X$, se definen $\mathcal{T}_i \doteq \{A \subseteq X \mid x \in A\} \cup \{\varnothing\}$ y $\mathcal{T}_e \doteq \{A \subseteq X \mid x \notin A\} \cup \{X\}$. Pruebe que $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_e$ son topologías en X.

Solución:

- Para $\mathcal{T}_i$:
  - $X \in \mathcal{T}_i$ porque $x \in X$. $\varnothing \in \mathcal{T}_i$ por definición.
  - Si $A, B \in \mathcal{T}_i$, hay dos casos:
    - Si $A = \varnothing \vee B = \varnothing$, $A \cap B = \varnothing \in \mathcal{T}_i$.
    - Si $A, B \neq \varnothing$, $x \in A \wedge x \in B$ por lo que $x \in A \cap B$ y se concluye que $A \cap B \in \mathcal{T}_i$.
  - Si $A_\alpha \in \mathcal{T}_i$ para todo $\alpha \in \Lambda$, hay dos casos:
    - Si $A_\alpha = \varnothing$ para todo $\alpha \in \Lambda$, $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \varnothing \in \mathcal{T}_i$.
    - Si $A_{\alpha_0} \neq \varnothing$ para algún $\alpha_0 \in \Lambda$, $x \in A_{\alpha_0}$ lo que implica que $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ y se concluye que $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}_i$.

  Por lo tanto, $\mathcal{T}_i$ es topología.
- Para $\mathcal{T}_e$:
  - $\varnothing \in \mathcal{T}_e$ porque $x \notin \varnothing$. $X \in \mathcal{T}_e$ por definición.
  - Si $A, B \in \mathcal{T}_e$, hay dos casos:
    - Si $A = X$, $A \cap B = B \in \mathcal{T}_e$.
    - Si $A \neq X$, $x \notin A$ por lo que $x \notin A \cap B$ y se concluye que $A \cap B \in \mathcal{T}_e$.
  - Si $A_\alpha \in \mathcal{T}_e$ para todo $\alpha \in \Lambda$, hay dos casos:
    - Si $A_{\alpha_0} = X$ para algún $\alpha_0 \in \Lambda$, $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = X \in \mathcal{T}_e$.
    - Si $A_\alpha \neq X$ para todo $\alpha \in \Lambda$, $x \notin A_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$, lo que implica que $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ y se concluye que $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}_e$.

  Por lo tanto, $\mathcal{T}_e$ es topología.

(b) Considere la familia de conjuntos $\mathcal{T} \doteq \{A \subseteq \mathbb{N} \mid n \in A \wedge p \mid n \implies p \in A\}$. Demuestre que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{N}$.

Solución:

- Si $n \in \mathbb{N}$ y $p \mid n$, entonces $p \in \mathbb{N}$ por lo que $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$. Para que $\varnothing \notin \mathcal{T}$, tendría que existir $n \in \varnothing$ tal que $p \mid n$ y $p \notin \varnothing$, pero, como no existe n tal que $n \in \varnothing$, esto es una contradicción (argumento por vacuidad). Así, $\varnothing \in \mathcal{T}$.
- Si $A, B \in \mathcal{T}$, $n \in A \cap B$ y $p \mid n$, entonces, como $n \in A$ y $n \in B$, se tiene que $p \in A$ y $p \in B$, es decir, $p \in A \cap B$. Así, $A \cap B \in \mathcal{T}$.
- Si $A_\alpha \in \mathcal{T}$ para todo $\alpha \in \Lambda$, tomamos $n \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, $p \mid n$ y se tendrá que $n \in A_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in \Lambda$. Como $A_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$, se tiene que $p \in A_{\alpha_0}$, por lo que $p \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, lo que implica que $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Por lo tanto, $\mathcal{T}$ es topología.

(c) Considere la familia de conjuntos $\mathcal{T} \doteq \{G_k \mid k \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}^2\}$, donde $G_k \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y + k\}$. Pruebe que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$ y caracterice los conjuntos cerrados.

Solución:

- $X, \varnothing \in \mathcal{T}$ por definición.
- Si $A, B \in \mathcal{T}$, consideramos tres casos:

- Si $A = X$, $A \cap B = B \in \mathcal{T}$.
- Si $A = \varnothing$, $A \cap B = \varnothing \in \mathcal{T}$.
- Si $A, B \neq \varnothing$ y $A, B \neq X$, entonces $A = G_i$ y $B = G_j$ para $i, j \in \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad, $i > j$ y así:

$$G_i \cap G_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y + i \wedge x > y + j\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y + i\} = G_i,$$

por lo que $G_i \cap G_j = G_i \in \mathcal{T}$.

- Si $A_\alpha \in \mathcal{T}$ para todo $\alpha \in \Lambda$, consideramos tres casos:
  - Si $A_{\alpha_0} = X$ para algún $\alpha_0 \in \Lambda$, se tiene que $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = X \in \mathcal{T}$.
  - Si $A_\alpha = \varnothing$ para todo $\alpha \in \Lambda$, se tiene que $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \varnothing \in \mathcal{T}$.
  - Si $A_\alpha \neq X$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y $A_{\alpha_0} \neq \varnothing$ para algún $\alpha_0 \in \Lambda$, podemos suponer que todos los A_α son no vacíos (ya que el vacío no aporta a la unión). Así, $A_\alpha = G_{k_\alpha}$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Así,

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_{k_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \alpha \in \Lambda \text{ tal que } x > y + k_\alpha\}.$$

Tomemos $k \doteq \inf_{\alpha \in \Lambda} k_\alpha$ y consideramos dos casos:

* Si $k > -\infty$, entonces $x > y + k_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$ es equivalente a $x > y + k$, por lo que $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = G_k \in \mathcal{T}$.
* Si $k = -\infty$, entonces para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $\alpha_M \in \Lambda$ tal que $k_{\alpha_M} < M$. Luego, dados $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que existe $\alpha_{x-y} < x - y$, lo que implica que $x - y > k_{x-y} \implies x > y + k_{x-y}$, es decir, $(x,y) \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$. Luego, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}$.

Por lo tanto, $\mathcal{T}$ es topología.

P2. Dado un conjunto X, consideremos un operador $\Psi \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que

(i) $\Psi(\varnothing) = \varnothing$,

(ii) $A \subseteq \Psi(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$,

(iii) $\Psi(\Psi(A)) = \Psi(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ y

(iv) $\Psi(A \cup B) = \Psi(A) \cup \Psi(B)$ para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Un operador con estas propiedades se dice **operador clausura de Kuratowski**.

Pruebe que Ψ es monótona, es decir, que $A \subseteq B \implies \Psi(A) \subseteq \Psi(B)$. Use lo anterior para probar que $\mathcal{T}_\Psi \doteq \{A \subseteq X \mid \Psi(A^c) = A^c\}$ es una topología en X.

Solución: Si $A \subseteq B$, se tiene que $A = (A \setminus B) \cup B$. Por la propiedad (iv), $\Psi(A) = \Psi(A \setminus B) \cup \Psi(B) \supseteq \Psi(B)$. Luego, Ψ es monótona.

Veamos que $\mathcal{T}$ es topología:

- Por la propiedad (i), $\Psi(X^c) = \Psi(\varnothing) = \varnothing = X^c$, por lo que $X \in \mathcal{T}$. Por la propiedad (ii), $\Psi(X) \supseteq X$, pero, como Ψ llega a $\mathcal{P}(X)$, se tiene que $\Psi(X) \subseteq X$. Luego, $\Psi(\varnothing^c) = \Psi(X) = X = \varnothing^c$ y $\varnothing \in \mathcal{T}$.
- Si $A, B \ \in \mathcal{T}$, se tiene que $\Psi(A^c) = A^c$ y $\Psi(B^c) = B^c$. Luego, por la propiedad (iv):

$$\Psi((A \cap B)^c) = \Psi(A^c \cup B^c) = \Psi(A^c) \cup \Psi(B^c) = A^c \cup B^c = (A \cap B)^c,$$

por lo que $A \cap B \in \mathcal{T}$.

- Si $A_\alpha \in \mathcal{T}$ para todo $\alpha \in \Lambda$, por monotonía

$$\Psi\left(\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c\right) = \Psi\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c\right) \subseteq \Psi(A_{\alpha_0}^c) = A_{\alpha_0}^c$$

para todo $\alpha_0 \in \Lambda$. Tomando intersección al lado derecho, se obtiene que

$$\Psi\left(\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c.$$

Por la propiedad (ii), $\Psi\left(\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c\right) \supseteq \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c$ por lo que $\Psi\left(\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c\right) = \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c$ y $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

P3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico que posee una base numerable $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{S}$ es otra base de $\mathcal{T}$, pruebe que $\mathcal{S}$ tiene una subfamilia numerable que también es base de $\mathcal{T}$.

Solución: Escribamos $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para n fijo, como B_n es abierto y $\mathcal{S}$ es base, existen $S_i^n \in \mathcal{S}$ tales que $\bigcup_{i\in I_n} S_i^n = B_n$. Por otro lado, como S_i^n es abierto y $\mathcal{B}$ es base, existen $B_{i,m}^n \in \mathcal{B}$ tales que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_{i,m}^n = S_i^n$. Se tiene que $\mathcal{B}' \doteq \{B_{i,m}^n\}_{m\in N, i\in I_n} \subseteq \mathcal{B}$, por lo que es una familia numerable. Escribamos $\mathcal{B}' = \{B_j^n\}_{j\in\mathbb{N}}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe un i_j tal que $B_j^n \subseteq S_{i_j}^n$, ya que $B_{i,m}^n \subseteq S_i^n$ para todo $m \in \mathbb{N}, i \in I_n$. Luego,

$$B_n = \bigcup_{i\in I_n} S_i^n = \bigcup_{i\in I_n}\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_{i,m}^n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j^n \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} S_{i_j}^n \subseteq \bigcup_{i\in I_n} S_i^n = B_n$$

y se obtiene que $B_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} S_{i_j}^n$. Tomemos la familia $\mathcal{S}' \doteq \{S_{i_j}^n\}_{n\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ que es numerable y verifica que todo B_n se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{S}'$. Luego, como $\mathcal{B}$ es base, $\mathcal{S}'$ también es base y se concluye el resultado.

P4. Considere los conjuntos $\mathcal{B} \doteq \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(a) Muestre que $\mathcal{B}$ forma una base para una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}$.

Solución:

- Notemos que $\bigcup_{x\in\mathbb{R}}[x, x+1) = \mathbb{R}$ y que $[x, x+1) \in \mathcal{B}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que $\mathcal{B}$ recubre $\mathbb{R}$.
- Si $A, B \in \mathcal{B}$, entonces $A = [a, b), B = [c, d)$. Luego, $A \cap B = [\max\{a, c\}, \min\{b, d\})$ (eventualmente vacío si $\max\{a, c\} \geq \min\{b, d\}$), por lo que $A \cap B \in \mathcal{B}$. Así, dado $x \in A \cap B$, existe $C = A \cap B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subseteq A \cap B$..

(b) Pruebe que todo $B \in \mathcal{B}$ es abierto y cerrado en $\mathcal{T}$.

Solución: Sea $B \in \mathcal{B}$. Como un elemento de la base siempre es abierto, B es abierto. Por otro lado, B se escribe como $B = [a, b)$ y

$$B^c = [a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty) = \bigcup_{x<a}[x, a) \cup \bigcup_{x>b}[b, x),$$

por lo que B^c es unión de abiertos y por lo tanto es abierto. Luego, B es cerrado.

(c) Demuestre que $\mathcal{T}$ no tiene una base numerable.

Solución: Sea $N = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ una colección numerable. Definamos $a_n \doteq \inf A_n$ (eventualmente $-\infty$). Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y veamos que $[a, a+1)$ no se puede escribir como unión de elementos de N. Como $\inf[a, a+1) = a$, si $\inf A_{n_0} < a$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y $n_0 \in I \subseteq \mathbb{N}$, entonces $\inf \bigcup_{i\in I} A_i < a$ y se tendrá que $\bigcup_{i\in I} A_i \neq [a, a+1)$. Tomemos entonces $I \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\inf A_i \geq a$ para todo $i \in I$ (si no existe tal I, entonces se concluye que N no es base).

Como $\inf A_i \geq a$ y $a \neq \inf A_i$ por construcción, se tiene que $\inf A_i > a$, por lo que $a \notin A_i$ para todo $i \in I$. Así, $a \notin \bigcup_{i\in I} A_i$, por lo que $\bigcup_{i\in I} A_i \neq [a, a+1)$. Luego, el abierto $[a, a+1)$ no se puede escribir como unión de elementos de N, por lo que N no es base.

P5. Sea X un conjunto y $\mathcal{F} \doteq \{f \colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ función}\}$. Para cada $f \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ y $E \doteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ subconjunto finito de X se define $A(f, \varepsilon, E) \doteq \{g \in \mathcal{F} \mid |g(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E\}$. Muestre que estos conjuntos forman una base de una topología en $\mathcal{F}$.

Solución:

- Notemos que dado $f \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ y $E \subseteq X$ finito, se tiene que $|f(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$ para todo $x \in E$, por lo que $f \in A(f, \varepsilon, E)$. Así, $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} A(f, \varepsilon, E) = \mathcal{F}$.
- Sean $f, g \in \mathcal{F}$, $\varepsilon, \delta > 0$ y $E, F \subseteq X$ finitos. Si $h \in A(f, \varepsilon, E) \cap A(g, \delta, F)$, se tiene que

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E \wedge |h(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in F.$$

Como estas desigualdades son estrictas, se tiene que $\varepsilon - |h(x) - f(x)| > 0$ para todo $x \in E$ y además que $\delta - |h(x) - g(x)| > 0$ para todo $x \in F$. Tomemos

$$\eta \doteq \text{mín}\{\underset{x \in E}{\text{mín}}\{\varepsilon - |h(x) - f(x)|\}, \underset{x \in F}{\text{mín}}\{\delta - |h(x) - g(x)|\}\}.$$

Se verfica que $\eta > 0$, pues todos los argumentos son estrictamente positivos y que $h \in A(h, \eta, E \cup F)$. Por construcción, $|h(x) - f(x)| + \eta \leq \varepsilon$ para todo $x \in E$ y $|h(x) - g(x)| + \eta \leq \delta$ para todo $x \in F$. Veamos que $A(h, \eta, E \cup F) \subseteq A(f, \varepsilon, E) \cap A(g, \delta, F)$. Sea $\ell \in A(h, \eta, E \cup F)$, luego

$$|\ell(x) - f(x)| \leq |\ell(x) - h(x)| + |h(x) - f(x)| < \eta + |h(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in E$$

y

$$|\ell(x) - g(x)| \leq |\ell(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| < \eta + |h(x) - g(x)| \leq \delta \quad \forall x \in F,$$

por lo que $\ell \in A(f, \varepsilon, E) \cap A(g, \delta, F)$ y se obtiene que $h \in A(h, \eta, E \cup F) \subseteq A(f, \varepsilon, E) \cap A(g, \delta, F)$, con lo que se concluye el resultado.

P6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Pruebe que las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) Para todo $x \in X$, existe una vecindad V_x tal que toda vecindad U de x cumple $V_x \subseteq U$,

(ii) la intersección de cualquier familia de abiertos es abierto y

(iii) la unión de cualquier familia de cerrados es cerrado.

Solución:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de abiertos. Como V_x es una vecindad, existe $x \in U \subseteq V_x$ abierto, pero, como U también es una vecindad, $V_x \subseteq U$ y se concluye que $V_x = U$, por lo que V_x es abierto. Si $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \doteq A$, entonces $x \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y, al ser A_α vecindad, se tiene que $V_x \subseteq A_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$, por lo que $V_x \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$. Luego,

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcap_{x \in A} V_x \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha,$$

por lo que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es unión de abiertos y es abierto.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de cerrados. Se tiene que C_α^c es abierto, por lo que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha^c$ es abierto. Luego, $\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha^c\right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ es cerrado. La demostración de la otra implicancia es análoga.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Dado $x \in X$, tomemos

$$V_x \doteq \bigcap_{\substack{x \in A \\ A \text{ abierto}}} A,$$

que será abierto porque es intersección de abiertos y $x \in V_x$ porque x está en todos los conjuntos que se intersectan. Sea ahora U una vecindad de x. Por definición, existe un abierto A tal que $x \in A \subseteq U$ y, como A participa en la intersección, se tiene que $V_x \subseteq A$, por lo que $V_x \subseteq U$.

P7. Sea X un conjunto.

(a) Si $\mathcal{T}$ es una topología en X y $\mathcal{V}_x$ la familia de todas las vecindades de $x \in X$ para $\mathcal{T}$, muestre que se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Si $V \in \mathcal{V}_x$, entonces $x \in V$.
(ii) Si $U, V \in \mathcal{V}_x$, entonces $U \cap V \ \in \mathcal{V}_x$.
(iii) Si $V \in \mathcal{V}_x$ y $V \subseteq U$, entonces $U \in \mathcal{V}_x$.
(iv) Si $V \in \mathcal{V}_x$, entonces existe $V \supseteq U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \in \mathcal{V}_y$ para todo $y \in U$.

Solución:

(i) Si $V \in \mathcal{V}_x$, entonces existe A abierto tal que $x \in A \subseteq V$, por lo que $x \in V$.
(ii) Si $U, V \in \mathcal{V}_x$, entonces existen A, B abiertos tales que $x \in A \subseteq U$ y $x \in B \subseteq V$. Luego, $x \in A \cap B \subseteq U \cap V$, por lo que $U, V \in \mathcal{V}_x$.
(iii) Si $V \in \mathcal{V}_x$, entonces existe A abierto tal que $x \in A \subseteq V$. Si $V \subseteq U$, entonces $x \in A \subseteq V \subseteq U$, por lo que $U \in \mathcal{V}_x$.
(iv) Si $V \in \mathcal{V}_x$, entonces existe U abierto tal que $U \subseteq V$. Dado $y \in U$, se tiene que $y \in U \subseteq U$ con U abierto, por lo que $U \in \mathcal{V}_y$ para todo $y \in U$.

(b) Si $x \mapsto \mathcal{V}_x$ es una función que a cada x le asigna una familia no vacía $\mathcal{V}_x$ que cumple (i), (ii) y (iii), entonces $\mathcal{T} \doteq \{V \subseteq X \mid V \in \mathcal{V}_x \quad \forall x \in V\}$ es una topología en X. Si además se satisface (iv), entonces $\mathcal{V}_x$ corresponde a todas las vecindades de x para $\mathcal{T}$.

Solución: Veamos primero que $\mathcal{T}$ es topología.

- Como $\mathcal{V}_x$ no es vacío, existe $V_x \in \mathcal{V}_x$. Además como $V_x \subseteq X$, por (iii) se tiene que $X \in \mathcal{V}_x$ para todo $x \in X$. Así, $X \ \in \mathcal{T}$. Si $\varnothing \notin \mathcal{T}$, tendría que existir $x \in \varnothing$ tal que $\varnothing \notin \mathcal{V}_x$, lo que es falso, por lo que $\varnothing \in \mathcal{T}$ (argumento por vacuidad).
- Dados $A, B \in \mathcal{T}$ y $x \in A \cap B$, como $A \in \mathcal{V}_x$ y $B \in \mathcal{V}_x$ se tiene, por (ii), que $A \cap B \in \mathcal{V}_x$, por lo que $A \cap B \in \mathcal{T}$.
- Sean A_α tales que, para todo $\alpha \in \Lambda$, $A_\alpha \in \mathcal{T}$. Si $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, existe $\alpha_0 \ \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\alpha_0}$, por lo que $A_{\alpha_0} \in \mathcal{V}_x$. Como $A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, por (iii) se concluye que $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \mathcal{V}_x$ y $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Finalmente, si V es una vecindad para x, existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq V$. Por definición, $A \in \mathcal{V}_x$ y, por (iii), $V \in \mathcal{V}_x$. Por otro lado, si $V \in \mathcal{V}_x$ existe, por (iv), $V \supseteq U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \in \mathcal{V}_y$ para todo $y \in U$, es decir, $U \in \mathcal{T}$. Por (i), además $x \in U$, por lo que encontramos un abierto U tal que $x \in U \subseteq V$, es decir, V es una vecindad de x.