Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
27 de junio de 2012

# Ejercicio 5: E.v.t y Teoremas de Análisis Funcional

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

**P1.** [**2 pts.**] Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos.

**(a)** [*1 pto.*] Demuestre que $X \doteq \prod_{i\in I} X_i$ dotado de la topología producto es un espacio vectorial topológico. Demuestre además que si cada $X_i$ es localmente convexo, entonces $X$ también lo es.

***Solución:*** Debemos verificar que la ponderación por escalar y la suma son funciones continuas. En efecto, si $\lambda_\alpha \to \lambda$ es una red de escalares y $x_\alpha \to x$ es una red en $X$, debemos verificar que $\lambda_\alpha x_\alpha \to \lambda x$. Esto es equivalente a que $(\lambda_\alpha x_\alpha)(i) \to (\lambda x)(i)$ para todo $i \in I$. Se tiene que

$$(\lambda_\alpha x_\alpha)(i) = \lambda_\alpha(x_\alpha(i)) \to \lambda(x(i)) = (\lambda x)(i)$$

por la continuidad del producto por escalar en $X_i$.

Por otro lado, si $x_\alpha \to x$ e $y_\alpha \to y$ son redes en $X$, entonces debemos verificar que $x_\alpha + y_\alpha \to x + y$. Esto es equivalente a que $(x_\alpha + y_\alpha)(i) \to (x + y)(i)$ para todo $i \in I$. Además,

$$(x_\alpha + y_\alpha)(i) = x_\alpha(i) + y_\alpha(i) \to x(i) + y(i) = (x + y)(i)$$

por la continuidad de la suma en $X_i$.

Finalmente, si $V$ es una vecindad de 0 en $X$, entonces existen vecindades $V_i$ de 0 en $X_i$ para todo $i$ tales que $\prod_{i\in I} V_i \subseteq V$ (donde $V_i$ es distinto de $X_i$ sólo para finitos $i \in I$, pero esto es irrelevante porque $X_i$ es una vecindad de 0 en $X_i$). Como cada $X_i$ es localmente convexo, existen vecindades $U_i \subseteq V_i$ de 0 en $X_i$ convexas y equilibradas. Claramente $U \doteq \prod_{i\in I} U_i \subseteq V$. Además, si $x, y \in U$ y $\lambda \in [0, 1]$ entonces $\lambda x(i) + (1 - \lambda)y(i) \in V_i$ para todo $i \in I$, por lo que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ y se obtiene que $U$ es convexo. Por otro lado, si $x \in U$ y $\lambda \in [-1, 1]$, entonces $\lambda x(i) \in U_i$ para todo $i \in I$, por lo que $\lambda x \in U$ y $U$ es equilibrado. Concluimos que $X$ es localmente convexo.

**(b)** [*1 pto.*] Si $X$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, ¿debe ser cada $X_i$ localmente convexo?

***Solución:*** Sí. Dada una vecindad $V_i$ de 0 en $X_i$, tenemos que $V = V_i \times \prod_{j\neq i} X_j$ es una vecindad de 0 en $X$. Como $X$ es localmente convexo, existe una vecindad $U$ de 0 convexa equilibrada tal que $U \subseteq V$. Además, si $\pi_i \colon X \to X_i$ es la proyección a $X_i$ (definida por $\pi_i(x) = x(i)$), entonces $\pi_i(U) \subseteq \pi_i(V) = V_i$. Basta ver que $\pi_i(U)$ es convexa equilibrada. Si $x', y' \in \pi_i(U)$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces existen $x, y \in U$ tales que $x(i) = x'$ e $y(i) = y'$. Como $U$ es convexo, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ y, como $\pi$ es lineal, concluimos que $\lambda x' + (1 - \lambda)y' \in \pi_i(U)$. Finalmente, si $x' \in \pi_i(U)$ y $\lambda \in [-1, 1]$, entonces existe $x \in U$ tal que $x(i) = x'$. Como $U$ es equilibrado, $\lambda x \in U$ y, como $\pi$ es lineal, $\lambda x' \in \pi_i(U)$. Concluimos que $\pi_i(U) \subseteq V_i$ es una vecindad de 0 convexa equilibrada, por lo que $X_i$ es localmente convexo.

**P2.** [**4 pts.**] Sea $X$ un espacio de Banach e $Y$ un e.v.n.. Suponga que existe $T\colon X \to Y$ lineal, continua y abierta.

**(a)** [*1 pto.*] Muestre que $T$ es sobreyectiva. Considere además $K = \operatorname{Ker} T$ y defina en $X/K$ la función $\tilde{T}([x]) = T(x)$. Muestre que $\tilde{T}$ está bien definida.

***Solución:*** Como $T$ es abierta, $T(X)$ es abierto en $Y$. Como el único sub-espacio de interior no vacío es el espacio completo, se obtiene que $T(X) = Y$.

Sean $x, y \in X$ tales que $[x] = [y]$, es decir, tales que $x - y \in K$. Luego, $T(x - y) = 0$ y por lo tanto $T(x) = T(y)$. Concluimos que $\tilde{T}$ está bien definida.

**(b)** [*1 pto.*] Muestre que la proyección $\pi\colon X \to X/K$ (definida por $\pi(x) = [x]$) y $\tilde{T}$ son aplicaciones abiertas.

***Solución:*** $\pi\colon X \to X/K$ es una función lineal, sobreyectiva y continua de un espacio de Banach en un espacio de Banach, por lo que es abierta.

Por otro lado, si $O$ es abierto en $X/K$ entonces $\tilde{T}(O) = T(\pi^{-1}(O))$ (ya que $\tilde{T} \circ \pi = T$), que es abierto en $Y$ porque $\pi$ es continua y $T$ es abierta.

**(c)** [*2 pts.*] Concluya que $Y$ es un espacio de Banach.

***Solución:*** Si $O$ es abierto en $Y$, tenemos que $\tilde{T}^{-1}(O) = \pi(T^{-1}(O))$, que es abierto porque $T$ es continua y $\pi$ es abierta. Así, obtenemos que $\tilde{T}$ es continua. Como $\pi$ y $T$ son sobreyectivas, $\tilde{T}$ también lo es. Además, si $[x] \neq [y]$ entonces $x - y \notin K$ y por lo tanto $T(x) \neq T(y)$, por lo que $\tilde{T}([x]) \neq \tilde{T}([y])$. Así, $\tilde{T}$ es también inyectiva. Concluimos que $\tilde{T}$ es una aplicación lineal, biyectiva y bicontinua entre $X/K$ e $Y$, por lo que, como $X/K$ es un espacio de Banach, $Y$ también lo es (al ser lineal y continua es uniformemente continua).

**Indicación.** Recuerde (no lo pruebe) que el cociente entre un espacio de Banach y un subespacio cerrado es un espacio de Banach. Recuerde además que la proyección $\pi$ es lineal y continua.