Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
7 de junio de 2012

Trabajo Dirigido 3: Teoremas de Arzelà-Ascoli, Dini y Stone-Weierstrass

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

Un conjunto A en un e.t. X se dice **relativamente compacto** si $\overline{A}$ es compacto en X. En adelante K será un espacio topológico compacto y separado y $\mathcal{C}(K)$ el e.v.n. de las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Se dice que un espacio vectorial $\mathcal{A}$ es un álgebra si además está dotado de un producto asociativo y que distribuye sobre la suma. Note que $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra y que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$ es un álgebra si y sólo si es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{C}(K)$ y es cerrado para el producto.

P1. **(a)** Si X es un e.m. completo, demuestre que A es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.

(b) Muestre que si $S \subseteq \mathcal{C}(K)$ es totalmente acotado, entonces es equicontinuo y acotado.

(c) Muestre que si $S \subseteq \mathcal{C}(K)$ es equicontinuo y acotado, entonces es totalmente acotado.

Indicación. Dado $\varepsilon > 0$, encuentre $x_1, \dots, x_n \in K$ y $U_1, \dots, U_n$ vecindades abiertas de $x_1, \dots, x_n$ que recubren K y tales que $|f(x_i) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in U_i$. Use lo anterior para probar que existen $f_1, \dots, f_m \in S$ tales que para todo $f \in S$ existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\max_{i=1,\dots,m} \|f(x_i) - f_j(x_i)\| < \varepsilon$.

(d) Deduzca que $S \subseteq \mathcal{C}(K)$ es relativamente compacto si y sólo si es equicontinuo y acotado. Este resultado se conoce como **teorema de Arzelà-Ascoli**.

Solución:

(a) Supongamos que A es relativamente compacto. Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos la familia $\{B'(x, \varepsilon)\}_{x \in A}$ que es un recubrimiento abierto de $\overline{A}$ (ya que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$). Como $\overline{A}$ es compacto, existen $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B'(x_i, \varepsilon)$, lo que muestra que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B'(x_i, \varepsilon)$ por lo que A es totalmente acotado.

Supongamos ahora que A es totalmente acotado. Sabemos que $\overline{A}$ es completo por ser un conjunto cerrado en un espacio métrico completo, así que basta demostrar que $\overline{A}$ es totalmente acotado (ya que un conjunto es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado). Dado $\varepsilon > 0$, como A es totalmente acotado existen $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Como $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ es una unión finita de cerrados es también un conjunto cerrado, lo que muestra que $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

(b) Como S es totalmente acotado, existen $f_1, \dots, f_n$ en S tales que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(f_i, 1)$. Luego, dado $f \in S$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f \in B(f_i, 1) \iff \|f - f_i\|_\infty \leq 1$. Por desigualdad triangular, $\|f\|_\infty \leq \|f_i\|_\infty + 1$. Luego, si definimos $M \doteq \max_{i=1,\dots,n} \|f_i\|_\infty + 1$ se tendrá que $\|f\|_\infty \leq M$ para todo $f \in S$ y obtenemos que S es acotado.

Sea $\varepsilon > 0$. Como S es totalmente acotado, existen $f_1, \dots, f_n$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon/3)$. Como cada f_i es continua en x, existe U_i vecindad de x tal que $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon/3$ para todo $y \in U_i$. Definamos $U \doteq \bigcap_{i=1}^n U_i$, que es una vecindad de x. Dado $f \in S$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\|f - f_i\|_\infty \leq \varepsilon/3$. Así, si $y \in U$ se tiene que $y \in U_i$ por lo que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \leq \|f - f_i\|_\infty + \varepsilon/3 + \|f - f_i\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

por lo que S es equicontinuo.

(c) Sea $\varepsilon > 0$. Para $x \in K$, existe U_x vecindad abierta de x tal que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ para todo $y \in U_x$ y para todo $f \in S$. Como $x \in U_x$, la familia $\{U_x\}_{x \in K}$ es un recubrimiento abierto de K, por lo que existen $x_1, \dots, x_n \in K$ y tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Definamos $U_i \doteq U_{x_i}$.

El conjunto $R = \{(f(x_i), \dots, f(x_n)) \mid f \in S\}$ es acotado en $\mathbb{R}^n$ (dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$) porque existe $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M$ para todo $f \in S$. Este conjunto es relativamente compacto (porque su adherencia es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$), por lo que es totalmente acotado. Así, existen $f_1, \dots, f_m$ tales que para todo $f \in S$ existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\max_{i=1,\dots,n} \|f(x_i) - f_j(x_i)\| < \varepsilon$. Sea $x \in K$ y i tal que $x \in U_i$. Así,

$$|f(x) - f_j(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)| \leq 3\varepsilon.$$

(d) Como $\mathcal{C}(K)$ es un espacio de Banach, en particular es un espacio métrico completo, por lo que la propiedad de ser totalmente acotado es equivalente a ser relativamente compacto. Además, **(b)** y **(c)** muestran que un conjunto en $\mathcal{C}(K)$ es relativamente compacto si y sólo si es equicontinuo y acotado, con lo que se concluye el resultado.

P2. Sea una sucesión (f_n) de funciones en $\mathcal{C}(K)$ con la propiedad de ser puntualmente creciente ($f_n(x)$ es una sucesión creciente en $\mathbb{R}$ para todo $x \in K$) que converge puntualmente a $f \in \mathcal{C}(K)$. Muestre que f_n converge uniformemente a f. Este resultado se llama **teorema de Dini**.

Solución: Dado $\varepsilon > 0$, para todo $x \in K$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_x}(x) > f(x) - \varepsilon$, ya que $(f_n(x))$ es un sucesión creciente que converge a $f(x)$. Como $f - f_n$ es continua y positiva, existe U_x vecindad abierta de x tal que

$$0 \leq f(y) - f_n(y) \leq f(y) - f_{n_x}(y) < \varepsilon$$

para todo $y \in U_x$ y para todo $n \geq n_x$.

Como $\{U_x\}_{x\in K}$ es un recubrimiento abierto de K, existirán $x_1, \dots, x_m \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Definiendo $N = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_m}\}$ se tendrá $|f(y) - f_N(y)| \leq \varepsilon$ para todo $y \in K$ y para todo $n \geq N$, lo que muestra que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

P3. **(a)** Pruebe que si $f, g \in \mathcal{C}(K)$, entonces $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Un espacio de Banach que es álgebra y que verifica esta desigualdad se llama **álgebra de Banach**.

(b) Suponga $A \subseteq \mathcal{C}(K)$ es cerrado para $\wedge$ y $\vee$. Muestre que

$$\overline{A} = \{f \in \mathcal{C}(K) \ \mid \ \forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in K, \exists f_{x,y} \in A \text{ tal que } |f(x) - f_{x,y}(x)| < \varepsilon \wedge |f(y) - f_{x,y}(y)| < \varepsilon\},$$

es decir, las funciones que se pueden aproximar en dos puntos por funciones de A.

(c) Demuestre que si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$ es un álgebra cerrada para la topología de $\mathcal{C}(K)$, entonces $\mathcal{A}$ es cerrada para $\wedge$ y $\vee$.

(d) Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$ un álgebra que separa puntos de K (es decir, tal que para todo $x \neq y$ en K existe $f \in \mathcal{A}$ que verifica $f(x) \neq f(y)$).

i) Pruebe que si no existe $x_\infty \in K$ tal que $f(x_\infty) = 0$ para todo $f \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(K)$.
Indicación. Muestre que si $g \in \mathcal{C}(K)$, entonces para todo $x, y \in K$ existen $f \in \mathcal{A}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $(g(x), g(y)) = \lambda_1(f(x), f(y)) + \lambda_2(f(x)^2, f(y)^2)$.

ii) Muestre que si existe $x_\infty \in K$ tal que $f(x_\infty) = 0$ para todo $f \in \mathcal{A}$, entonces

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in \mathcal{C}(K) \ \mid \ f(x_\infty) = 0\}.$$

Indicación. Considere el álgebra de las funciónes de la forma $f + c$, con $f \in \mathcal{A}$ y $c \in \mathbb{R}$ y use la parte anterior.

Este resultado se conoce como el **teorema de Stone-Weierstrass**.

Solución:

(a) Se verifica que

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)g(x)| = \sup_{x\in K} |f(x)||g(x)| \leq \sup_{x\in K} |f(x)|\|g\|_\infty = \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

(b) Denotemos

$$B \doteq \{f \in \mathcal{C}(K) \ \mid \ \forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in K, \exists f_{x,y} \in A \text{ tal que } |f(x) - f_{x,y}(x)| < \varepsilon \wedge |f(y) - f_{x,y}(y)| < \varepsilon\}$$

y veamos que $\overline{A} = B$.

Claramente $\overline{A} \subseteq B$, pues si una función se puede aproximar uniformemente por funciones en A en particular se puede aproximar en dos puntos.

Sea ahora $f \in B$, $\varepsilon > 0$ y $f_{x,y} \in A$ tal que $|f_{x,y} - f(x)| < \varepsilon$ y $|f_{x,y} - f(y)| < \varepsilon$. Definamos

$$U_{x,y} \doteq \{z \in K \ \mid \ f_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}$$

que es una vecindad abierta de x y de y por la continuidad de $f_{x,y}$ y f.

Consideremos la familia $\{U_{x,y}\}_{y \in K}$, que es un recubrimiento abierto de K. Luego, existen $y_1, \ldots, y_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x,y_i}$.

Sea $f_x = f_{x,y_1} \wedge \cdots \wedge f_{x,y_n} \in A$. Luego, $f_x > f(x) - \varepsilon$ y $f_x(y) < \varepsilon + f(y)$ para todo $y \in K$.

Sea $V_x = \{z \in K \ \mid \ f_x(z) > f(x) - \varepsilon\}$, que es una vecindad abierta de x. La familia $\{U_x\}_{x \in K}$ es un recubrimiento abierto de K, por lo que existen $x_1, \ldots, x_m \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$. Definiendo $f_\varepsilon = f_{x_1} \vee \cdots \vee f_{x_m} \in A$, se concluye que $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Así, $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$, lo que muestra que $f \in \overline{A}$.

(c) Sean $f, g \in \mathcal{A}$. Notemos que

$$f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2} \quad \text{y} \quad f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

y, como $\mathcal{A}$ es álgebra, basta verificar que si $h \in \mathcal{A}$ entonces $|h| \in \mathcal{A}$.

Como h es continua y K es compacto, $h(K)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Sea (p_n) una sucesión de polinomios que convergen uniformemente a $|\cdot|$ en el compacto $h(K)$ (existen por resultado de cálculo en varias variables. En particular, la construcción se puede hacer con polinomios de Bernstein). Como $\mathcal{A}$ es un álgebra, $p_n \circ h \in \mathcal{A}$. Se concluye que $p_n \circ h \to |h|$ uniformemente y, como $\mathcal{A}$ es cerrada, que $|h| \in \mathcal{A}$.

(d) **i)** Dados $x, y \in K$ distintos, existen $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $f_1(x) \neq 0$ y $f_2(y) \neq 0$. Además, como $\mathcal{A}$ separa puntos, existe $f_3 \in \mathcal{A}$ tal que $f_3(x) \neq f_3(y)$. Podemos encontrar λ, μ reales tales que $f = f_1 + \lambda f_2 + \mu f_3 \in \mathcal{A}$ verifica $f(x) \neq f(y)$, $f(x) \neq 0$ y $f(y) \neq 0$ (basta tomar λ tal que $f_1(x) \neq -\lambda f_2(x)$ y $f_1(y) \neq -\lambda f_2(y)$ y luego elegir μ adecuadamente).

Sea $g \in \mathcal{C}(K)$. Con tal elección de f se tiene que $(f(x), f(y))$ y $(f^2(x), f^2(y))$ son linealmente independientes, por lo que existen reales λ_1, λ_2 tales que $(g(x), g(y)) = \lambda_1(f(x), f(y)) + \lambda_2(f^2(x), f^2(y))$. Definiendo $h = \lambda_1 f + \lambda_2 f^2 \in \mathcal{A}$, obtenemos que h aproxima en dos puntos a g. Por la parte anterior, $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra cerrada para $\vee$ y $\wedge$ y, por la parte **(b)**, $g \in \overline{\mathcal{A}}$.

ii) Sea $g \in \mathcal{C}(K)$ tal que $g(x_\infty) = 0$. Consideremos $\mathcal{B} = \{f + c \ \mid \ f \in \mathcal{A}, c \in \mathbb{R}\}$, que es claramente un álgebra. Esta álgebra verifica las hipótesis de parte anterior (ya que, en paricular, la función 1 está en $\mathcal{B}$), lo que muestra que $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(K)$. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $h = f + c$ con $f \in \mathcal{A}$ y $c \in \mathbb{R}$ que verifica $\|f + c - g\|_\infty < \varepsilon$. Como $f(x_\infty) = g(x_\infty) = 0$, necesariamente $|c| < \varepsilon$ y se obtiene que $\|f - g\|_\infty < 2\varepsilon$, por lo que $g \in \overline{\mathcal{A}}$.