Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
18 de julio de 2012

Examen: Parte 1

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. **(a)** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado tal que $\mathcal{T}|_F$ es la topología discreta. Supongamos que existe $D \subseteq X$ denso tal que $|\mathcal{P}(D)| \leq |F|$. Demuestre que $(X, \mathcal{T})$ no es normal.

Indicación. Argumente por contradicción y construya una función $f \colon \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(D)$ inyectiva.

(b) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico separado con infinitos puntos.

- **i)** Pruebe que si X no posee puntos de acumulación, entonces existe una familia infinita numerable de abiertos disjuntos no vacíos.
- **ii)** Pruebe que si X posee al menos un punto de acumulación, entonces existe una familia infinita numerable de abiertos disjuntos no vacíos.
- **iii)** Construya una función $\Phi \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{T}$ inyectiva y concluya que $|\mathcal{T}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

P2. Se dice que un espacio topológico T tiene ***tightness*** **numerable** si para todo conjunto $A \subseteq T$ y $x \in \overline{A}$ existe un conjunto numerable $S \subseteq A$ tal que $x \in \overline{S}$. Se dice que un espacio topológico T es **angelical** si dado $A \subseteq T$ y $x \in \overline{A}$ existe (x_n) en A tal que $x_n \to x$.

(a) El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado:

Teorema (Kaplansky). Si X es un espacio de Banach, $(X, \sigma(X, X^*))$ tiene *tightness* numerable.

Para ello siga como se indica.

- **i)** Encuentre una sucesión creciente $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos en X^* tales que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = X^*$ y cada M_n es w^*-compacto.
- **ii)** Tome $A \subseteq X$ y $a \in \overline{A}^w$. Fijando $n, m, k \in \mathbb{N}$ considere $x_1^*, \ldots, x_k^* \in M_n$ y una vecindad

$$V = \left\{ x \in X \;\middle|\; |\langle x_i^*, x - a\rangle| < \frac{1}{m} \quad \forall i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Pruebe que existe $a' \in V \cap A$, que el conjunto

$$U = \left\{ x^* \in M_n \;\middle|\; |\langle x^*, a' - a\rangle| < \frac{1}{m} \right\}$$

es abierto en (M_n, w^*) y que $x_i^* \in U$ para $i = 1, \ldots, k$.
- **iii)** Pruebe que el conjunto U^k es vecindad abierta de $(x_1^*, \ldots, x_k^*)$ y así encuentre finitos conjuntos abiertos $W_1, \ldots, W_p$ de la forma $\{x^* \in M_n \mid |\langle x^*, s_i - a\rangle| < \frac{1}{m}\}$, con $s_i \in A$, que recubran M_n.
- **iv)** Finalmente $W_1, \ldots, W_p$ nos entregan puntos $s_1, \ldots, s_p$ y tomamos $A_{(n,m,k)} = \{s_1, \ldots, s_p\}$ para construir el conjunto numerable que necesitábamos. Concluya el teorema.

(b) Sea X un espacio de Banach y $K \subseteq X$ un conjunto w-compacto. Muestre que $(K, \sigma(X, X^*)|_K)$ es angelical.

Indicación. Si $A \subseteq K$ y $x \in \overline{A}^w$, considere S como el teorema anterior y $L = \overline{\langle S\rangle}$. Use la metrizabilidad de $K \cap L$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
18 de julio de 2012

Examen: Parte 2

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P3. Sea X un espacio de Banach. El objetivo de este problema es demostrar el siguiente resultado:

Teorema (Eberlein-Šmulian). Sea $A \subseteq X$. Son equivalentes:

(i) A es w-compacto;

(ii) toda sucesión en A tiene una subsucesión w-convergente en A y

(iii) toda sucesión en A tiene una subred w-convergente en A.

Primero probaremos lo siguiente:

Lema (Eberlein-Šmulian). Sea $A \subseteq X$. Son equivalentes:

(i') $\overline{A}^w$ es w-compacto;

(ii') toda sucesión en A tiene una subsucesión w-convergente en X y

(iii') toda sucesión en A tiene una subred w-convergente en X.

Se propone el siguiente esquema de demostración:

(a) Suponga que A verifica **(i')** y considere una sucesión (a_n) en A e $Y = \overline{\langle \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle}$. Justifique que Y y B_Y son separables. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso numerable en B_Y, sea $x_n^* \in X^*$ tal que $\langle x_n^*, x_n \rangle = 1$ y muestre que $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ separa puntos en Y. Construya una subsucesión (b_n) de (a_n) tal que $\langle x_k^*, b_n \rangle$ es convergente en n para todo $k \in \mathbb{N}$ fijo. Muestre que (b_n) es w-convergente, lo que prueba que A verifica **(ii')**.

(b) Justifique que **(ii')** $\implies$ **(iii')**.

(c) Suponga que A verifica **(iii')**. Muestre que A es acotado en X y que basta demostrar que $\overline{J(A)}^{w^*} \subseteq J(X)$ para concluir **(i')**. Procederemos por contradicción, suponiendo que existe $x^{**} \in \overline{J(A)}^{w^*} \setminus J(X)$. Sea $\delta \doteq d(x^{**}, J(X))$.

Construiremos inductivamente sucesiones (a_n) en A y (x_n^*) en B_{X^*} tales que

(I) $\langle x^{**}, x_n^* \rangle > \frac{3}{4}\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(II) $|\langle x_n^*, a_k \rangle| < \frac{1}{4}\delta$ para todo $k < n$ y

(III) $\langle x_n^*, a_k \rangle > \frac{3}{4}\delta$ para todo $k \geq n$.

Justifique que existe $x_1^* \in B_{X^*}$ tal que $\langle x^{**}, x_1^* \rangle > \frac{3}{4}\delta$. Luego, justifique que existe $a_1 \in A$ tal que $\langle x_1^*, a_1 \rangle > \frac{3}{4}\delta$.

Suponiendo que tenemos $x_1^*, \dots, x_n^*$ y $a_1, \dots, a_n$ que verifican (I), (II) y (III), considere $\varphi \in X^{***}$ tal que $\|\varphi\| = 1$, φ se anula en $Y \doteq \overline{\langle \{J(a_i)\}_{1 \leq i \leq n} \rangle}$ y $\varphi(x^{**}) = d(x^{**}, Y)$ (existe por ejercicio 6). Use el teorema de Goldstine para aproximar φ por funciones de la forma $\langle \cdot, y^* \rangle \in X^{***}$ para construir x_{n+1}^* y a_{n+1} que verifiquen (I), (II) y (III).

Si (a_n) tuviera una subred (a_{n_λ}) tal que $a_{n_\lambda} \rightharpoonup a$, muestre que existe una combinación convexa de elementos de la subred a distancia menor a $\frac{\delta}{4}$ de a y use esto más (II) para obtener una contradicción con (III).

(d) Use el lema y el hecho que todo w-compacto en X es angelical para la topología débil para concluir el teorema. Recuerde que si T es un espacio topológico, $A \subseteq T$ es angelical si para todo $x \in \overline{A}$ existe (x_n) en A tal que $x_n \to x$.