Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
31 de mayo de 2012

Ejercicio 4: Compacidad y Espacios Producto

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. [**4 pts.**] Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ una familia de espacios topológicos y $X \doteq \prod_{i\in I} X_i$. Sea $\beta \doteq \left\{\prod_{i\in I} O_i \;\mid\; O_i \in \mathcal{T}_i\right\}$ y $\mathcal{T}$ la topología que tiene a $\mathcal{B}$ como base. Esta topología se llama **topología de las cajas**.

(a) [*1 pts.*] Muestre que las proyecciones $\pi_i \colon X \to X_i$ son continuas y abiertas para la topología $\mathcal{T}$.

Solución: Todo abierto de la base de la topología producto es abierto en la topología de las cajas, por lo que la $\mathcal{T}$ es más fina que la topología producto. Como las proyecciones son continuas en la topología producto también lo son en la topología de las cajas.

Para demostrar que π_i es abierta, basta ver que $\pi_i(O)$ es abierto en X_i para todo $O \in \mathbb{B}$. Si $O = \prod_{i\in I} O_i$ con O_i abierto para todo $i \in I$, se tiene que $\pi_i(O) = O_i$, que es abierto en X_i.

(b) [*1.5 pts.*] Demuestre que si I es infinito, $X_i = \mathbb{R}$ para todo $i \in I$ y $\mathcal{T}_i$ es la topología usual en $\mathbb{R}$ para todo $i \in I$, entonces ningún punto $x \in X$ tiene una base de vecindades numerable para $\mathcal{T}$.

Solución: Sea $x \in X$ y $\mathcal{B}'$ un conjunto numerable de vecindades de x. Como cada $B \in \mathcal{B}'$ es una vecindad de x, para todo $B \in \mathcal{B}'$ existe $O_B \in \beta$ tal que $x \in O_B \subseteq B$, por lo que si $\mathcal{B}'$ fuera una base de vecindades de x, entonces $\{O_B\}_{B\in\mathcal{B}'}$ también lo sería. Basta probar entonces que ningún conjunto numerable de abiertos en β que contienen a x puede ser base de vecindades.

Sea $\mathcal{B} = \{O^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \beta$. Escribamos $O^n = \prod_{i\in I} O_i^n$, con O_i^n abierto en $\mathbb{R}$ para todo $i \in I$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $J \subseteq I$ numerable y escribamos $J = \{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $O_{j_n}^n$ es abierto en $\mathbb{R}$, existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $(x(j_n) - 2\varepsilon_n, x(j_n) + 2\varepsilon_n) \subseteq O_{j_n}^n$ y por lo tanto $(x(j_n) - \varepsilon_n, x(j_n) + \varepsilon_n) \subsetneq O_{j_n}^n$.
Definamos $O \doteq \prod_{n\in\mathbb{N}}(x(j_n) - \varepsilon_n, x(j_n) + \varepsilon_n) \times \prod_{I\setminus J} O_i$, que verifica $x \in O$. Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $O^n \not\subseteq O$, ya que $O_{j_n}^n \not\subseteq (x(j_n) - \varepsilon_n, x(j_n) + \varepsilon_n)$. Esto muestra que $\mathcal{B}$ no es una base de vecindades de x.

(c) [*1.5 pts.*] Muestre que si I es numerable y X está dotado de la topología producto y todo X_i verifica que todo punto de X_i tiene una base de vecindades numerable, entonces todo $x \in X$ tiene una base de vecindades numerable.

Solución: Sea $x \in X$. Escribamos $I = \{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $x \in X$ y $\mathcal{B}_n = \{O_n^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades numerable de $x(i_n)$. Definamos

$$\mathcal{B} \doteq \left\{\prod_{n=1}^{N} O_n^{m_n} \times \prod_{n>N} X_{i_n} \;\middle|\; m_1, \ldots, m_N \in \mathbb{N}\right\}_{N\in\mathbb{N}}$$

que es numerable. Veamos que $\mathcal{B}$ es una base de vecindades de x: dada V vecindad de x para la topología producto, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ y O_n abiertos en X_{i_n} para $1 \leq n \leq N$ tales que

$$x \in \prod_{n=1}^{N} O_n \times \prod_{n>N} X_{i_n} \subseteq V,$$

porque los conjuntos de esta forma son una base para la topología producto. Como $\mathcal{B}_n$ es base de vecindades de $x(i_n)$ y $x(i_n) \in O_n$, se tiene que existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $x(i_n) \in O_n^{m_n} \subseteq O_n$, por lo que

$$x \in \prod_{n=1}^{N} O_n^{m_n} \times \prod_{n>N} X_{i_n} \subseteq \prod_{n=1}^{N} O_n \times \prod_{n>N} X_{i_n} \subseteq V,$$

lo que muestra que $\mathcal{B}$ es una base de vecindades de x.

P2. [**2 pts.**] Sea X un e.t.. Decimos que X es **secuencialmente compacto** si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X; que X es **numerablemente compacto** si todo recubrimiento numerable de abiertos tiene un subrecubrimiento finito y que X es **pseudocompacto** si toda función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ es acotada.

(a) [*1 pto.*] Pruebe que si X es secuencialmente compacto, entonces es numerablemente compacto.

Solución: Supongamos que $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de X que no tiene subrecubrimiento finito. Esto implica que $\bigcup_{i=1}^n O_i \neq X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que existe $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n O_i$.

Veamos que (x_n) no tiene subsucesión convergente. Dado $x \in X$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in O_N$. Como O_N es abierto, es una vecindad de x. Además, para todo $n \geq N$ se tiene que $x_n \notin O_N$. Si (x_{n_k}) es una subsucesión de (x_n), tomamos $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K \geq N$ y se tendrá que $x_{n_k} \notin O_N$ para todo $k \geq K$, es decir, que $x_{n_k} \not\to x$. Esto contradice que X es secuencialmente compacto.

(b) [*1 pto.*] Pruebe que si X es numerablemente compacto, entonces es pseudocompacto.

Solución: Los conjuntos $O_n = f^{-1}((-n,n))$ para $n \in \mathbb{N}$ son abiertos en $\mathbb{R}$ porque f es continua. Se tiene que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$, ya que dado $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \in (-n,n)$, lo que implica que $x \in O_n$. Como X es pseudocompacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^N O_i = O_N$, es decir, tal que $X = f^{-1}((-N,N))$, por lo que $f(x) \in (-N,N)$ para todo $x \in X$, lo que muestra que f es acotada y por ende X es pseudocompacto.