Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
3 de julio de 2012

Ejercicio 6: Teorema de Hahn-Banach y Topologías Débiles

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. [**4 pts.**] Sea E un espacio de Banach y F un sub-e.v. cerrado de E. Pruebe que para todo $x \in E \setminus F$ existe $x^* \in E^*$ que verifica $\|x^*\| = 1$, $x^* = 0$ en F y $\langle x^*, x\rangle = d(x, F)$.

Indicación. Considere el conjunto $F_0 = \{\lambda x - y \mid \lambda \in \mathbb{R}, y \in F\}$.

Solución: Si $F = E$, el resultado es trivial por vacuidad. Supongamos $F \neq E$ y sea $x \in E \setminus F$. Dado $z \in F_0$, existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ y un único $y \in F$ tales que $z = \lambda x - y$, porque $F_0 = F \oplus \langle\{x\}\rangle$. Como λ, y son únicos, podemos definir $f\colon F_0 \to \mathbb{R}$ por $f(z) = f(\lambda x - y) = \lambda d(x, F)$, que es una función lineal. Además, si $z \in F$ entonces $f(z) = (0 \cdot x - z) = 0 \cdot d(x, F) = 0$ y $f(x) = f(1 \cdot x - 0) = 1 \cdot d(x, F) = d(x, F)$.

Por otro lado,

$$|f(\lambda x - y)| = |\lambda| d(x, F) = d(\lambda x, F) = d(\lambda x - y, F) \leq d(\lambda x - y, \{0\}) = \|\lambda x - y\|,$$

por lo que $\|f\| \leq 1$. Finalmente, si (y_n) es una sucesión en F tal que $\|x - y_n\| \to d(x, F)$, entonces

$$\|f\| = \sup_{z \in F_0 \setminus \{0\}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{f(x - y_n)}{\|x - y_n\|} = \frac{d(x, F)}{\|x - y_n\|} \to 1$$

por lo que $\|f\| \geq 1$ y se deduce que $\|f\| = 1$. Concluimos extendiendo f a todo E por el teorema de prolongación de Hahn-Banach (ya que la extensión preserva la norma).

P2. [**2 pts.**] Sea E un espacio de Banach y $K \subseteq E$ un conjunto compacto para la topología fuerte. Si (x_n) es una sucesión en K tal que $x_n \rightharpoonup x$, muestre que $x_n \to x$.

Veamos que x es el único punto de acumulación de (x_n) para la topología fuerte (como (x_n) es una sucesión en un compacto, esto basta para probar que converge a x). En efecto, si $y \in X \setminus \{x\}$ fuera punto de acumulación de (x_n), entonces existiría (x_{n_k}) subsucesión de (x_n) tal que $x_{n_k} \to y$. Esto implica que $x_{n_k} \rightharpoonup y$, lo que es una contradicción pues $x_n \rightharpoonup x$ y la topología débil es separada.