Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
19 de abril de 2012

# Ejercicio 2: Espacios Métricos

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

**P1.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico acotado y considere la colección $\mathcal{F} \doteq \{A \subseteq X \mid A \text{ cerrado y no vacío}\}$. En el trabajo dirigido se probó que se puede definir la siguiente distancia en $\mathcal{F}$:

$$\rho(A, B) = \max\left\{\sup_{x\in A} d(x, B), \sup_{x\in B} d(x, A)\right\}.$$

**(a)** Pruebe que para todo $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{F}$, se tiene

$$\rho(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2) \leq \max\{\rho(A_1, A_2), \rho(B_1, B_2)\}.$$

**(b)** Pruebe que si $(X, d)$ es completo, entonces $(\mathcal{F}, \rho)$ también lo es. Para esto se propone el siguiente esquema:

- Considere una sucesión de Cauchy $(A_n)$ en $(\mathcal{F}, \rho)$. Muestre que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq N$ y todo $x \in A_i$, existe $y \in A_j$ tal que $d(x, y) \leq \varepsilon$.
- Sea $\varepsilon > 0$. Construya una subsucesión $A_{n_k}$ tal que para todo $x_0 \in \bigcup_{m\geq N} A_m$ existan $x_k \in A_{n_k}$ (con $k \geq 1$) tales que $d(x_k, x_{k+1}) \leq \varepsilon/2^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- Considere
$$B_n = \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}, \quad B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$
Muestre que $B$ es no vacío y que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n$ tal que $d(x, B) \leq \varepsilon$ para todo $x \in B_n$.
- Concluya.

.

**(c)** Sea $X = [0, 1]^n$. Considere una colección $\{T_i : X \to X\}_{i=1}^n$ de funciones Lipschitz de constante $0 \leq \lambda < 1$ fija. Pruebe que existe un único $A \in \mathcal{F}$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^n T_i(A)$.