Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
03 de abril de 2012

Ejercicio 1: Espacios vectoriales normados

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. [**4 pts.**] Sea $\vec{E}$ un e.v.n. y $\ell : \vec{E} \to \mathbb{R}$ función lineal. El objetivo de este problema es demostrar que ℓ es continua si y sólo si su núcleo,

$$\mathbb{K}\mathrm{er}(\ell) \doteq \left\{ \vec{x} \in \vec{E} \;\middle|\; \ell(\vec{x}) = 0 \right\},$$

es cerrado. Para esto, muestre la doble implicancia de la siguiente manera:

(a) [*0.5 pts.*] Muestre que si ℓ es continua, entonces $\mathbb{K}\mathrm{er}(\ell)$ es cerrado.

En lo que sigue, asumiremos que ℓ es no nulo, pues el caso contrario es trivial.

(b) [*0.5 pts.*] Muestre que dado $\vec{x} \in \vec{E} \setminus \mathbb{K}\mathrm{er}(\ell)$ fijo, todo $\vec{y} \in \vec{E}$ se puede escribir en la forma

$$\vec{y} = \lambda \vec{x} + \vec{z},$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{z} \in \mathbb{K}\mathrm{er}\,\ell$.

(c) [*3 pts.*] Sea $\vec{y}_n \to \vec{0}$. Demuestre que $\lambda_n \in \mathbb{R}$, correspondiente a la descomposición de $\vec{y}_n$ de la parte anterior, converge a 0. Concluya.

Solución:

(a) Notemos que $\mathbb{K}\mathrm{er}\,\ell = \ell^{-1}(\{\vec{0}\})$. Como $\{\vec{0}\}$ es cerrado y ℓ es continua, se concluye que $\mathbb{K}\mathrm{er}\,\ell$ es cerrado.

(b) Se verifica que

$$0 = \ell(\vec{y}) - \ell(\vec{y}) = \ell(\vec{y}) - \frac{\ell(\vec{y})}{\ell(\vec{x})}\ell(\vec{x}) = \ell(\vec{y}) - \ell\left(\frac{\ell(\vec{y})}{\ell(\vec{x})}\vec{x}\right) = \ell\left(\vec{y} - \frac{\ell(\vec{y})}{\ell(\vec{x})}\vec{x}\right),$$

por lo que $\vec{y} - \frac{\ell(\vec{y})}{\ell(\vec{x})}\vec{x} \in \mathbb{K}\mathrm{er}\,\ell$.
Luego, $\vec{y}$ se escribe

$$\vec{y} = \underbrace{\frac{\ell(\vec{y})}{\ell(\vec{x})}}_{\lambda}\vec{x} + \underbrace{\left(\vec{y} - \frac{\ell(\vec{y})}{\ell(\vec{x})}\vec{x}\right)}_{\vec{z}} = \lambda\vec{x} + \vec{z}.$$

(c) Escribimos $\vec{y}_n = \lambda_n \vec{x} + \vec{z}_n$. Si $\lambda_n \not\to 0$, entonces existe λ_{n_k} tal que $|\lambda_{n_k}| \geq \varepsilon > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (esto es exactamente la negación de que $\lambda_n \to 0$). Así,

$$\frac{\vec{y}_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = \vec{x} + \frac{\vec{z}_{n_k}}{\lambda_{n_k}} \to 0.$$

Como $\vec{x}$ está fijo, por álgebra de límites se obtiene que $\frac{\vec{z}_{n_k}}{\lambda_{n_k}} \to -\vec{x}$, lo que contradice que $\mathbb{K}\mathrm{er}\,\ell$ es cerrado.
Concluimos entonces que $\lambda_n \to 0$. Aplicando ℓ:

$$\ell(\vec{y}_n) = \ell(\lambda_n \vec{x} + \vec{z}_n) = \lambda_n \vec{x} \to 0,$$

por lo que ℓ es continua en $\vec{0}$. Por ser ℓ lineal, se concluye que es continua en todo $\vec{E}$.

P2. [**2 pts.**] Sea $\vec{E}$ un espacio de Banach separable y S un subconjunto no numerable de $\vec{E}$.

(a) [*1 pto.*] Dado $\varepsilon > 0$, pruebe que existe $\vec{x} \in S$ tal que $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap S$ es no numerable.

(b) [*1 pto.*] Pruebe que existe $\vec{x} \in \vec{E}$ tal que $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap S$ es no numerable para todo $\varepsilon > 0$. Un punto que cumple esta propiedad se conoce como **punto de condensación** de S.

Solución:

(a) Como $\vec{E}$ es separable, todo subconjunto de $\vec{E}$ también es separable. Así, existe $D \subseteq S$ denso numerable en S.

Escribimos

$$S = \bigcup_{\vec{x} \in D} B(\vec{x}, \varepsilon) \cap S.$$

La inclusión no trivial se justifica porque, dado $\vec{y} \in S$, por densidad existe $\vec{x} \in D$ tal que $\|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \varepsilon$. Obtenemos que S se escribe como unión numerable de conjuntos, por lo que alguno debe ser no numerable (ya que unión numerable de conjuntos numerables es numerable y S no lo es).

(b) Por la parte **(a)**, existe $\vec{p}_1 \in S$ tal que $A_1 \doteq B(\vec{p}_1, 1/2) \cap S$ es no numerable. Aplicando nuevamente la parte **(a)** a A_1, obtenemos que existe $\vec{p}_2 \in A_1$ tal que $A_2 \doteq B(\vec{p}_2, 1/2^2) \cap A_1$ es no numerable.

Por inducción, obtenemos una sucesión $(\vec{p}_n)$ tal que $\vec{p}_{n+1} \in B(\vec{p}_n, 1/2^n)$ y $B(\vec{p}_n, 1/2^n) \cap S$ es no numerable para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, dados $i \leq j$:

$$\|\vec{p}_i - \vec{p}_j\| \leq \|\vec{p}_i - \vec{p}_{i+1}\| + \|\vec{p}_{i+1} - \vec{p}_{i+2}\| + \cdots + \|\vec{p}_{j-1} - \vec{p}_j\| = \sum_{k=i}^{j-1} \|\vec{p}_k - \vec{p}_{k+1}\| \leq \sum_{k=i}^{j-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{i-1}},$$

por lo que $(\vec{p}_n)$ es de Cauchy y, como $\vec{E}$ es de Banach, $\vec{p}_n \to \vec{p} \in \vec{E}$. Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\vec{p}_N - \vec{p}\| \leq \varepsilon/2$ y $1/2^N \leq \varepsilon/2$. De este modo, si $\|\vec{y} - \vec{p}_N\| \leq 1/2^N$,

$$\|\vec{y} - \vec{p}\| \leq \|\vec{y} - \vec{p}_N\| + \|\vec{p}_N + \vec{p}\| \leq \frac{1}{2^N} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

por lo que $B(\vec{p}, \varepsilon) \supseteq B(\vec{p}_N, 1/2^N)$ y $B(\vec{p}, \varepsilon) \cap S$ es no numerable.