Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
12 de abril de 2012

Guía 2: Espacios Métricos

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. Sea (X, d) un espacio métrico acotado y considere la colección $\mathcal{F} \doteq \{A \subseteq X \mid A \text{ cerrado y no vacío}\}$. En el trabajo dirigido se probó que se puede definir la siguiente distancia en $\mathcal{F}$:

$$\rho(A, B) \doteq \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right\}.$$

(a) Para $A \subseteq X$, se definen

$$C(A) \doteq \{B \in \mathcal{F} \mid B \subseteq A\} \quad \text{y} \quad D(A) \doteq \{B \in \mathcal{F} \mid B \cap A \neq \emptyset\}$$

Pruebe que si A es abierto en X, entonces $C(A)$ y $D(A)$ son abiertos en $(\mathcal{F}, \rho)$. Además, demuestre que si B es cerrado en X, entonces $C(B)$ y $D(B)$ son cerrados en $(\mathcal{F}, \rho)$.

(b) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $(\mathcal{F}, \rho)$ convergente a A, pruebe que

$$A = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}.$$

(c) Sean (A_n) y (B_n) dos sucesiones en $(\mathcal{F}, \rho)$ convergentes a A y B respectivamente. Demuestre que $A_n \cup B_n \to A \cup B$ y que si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$. Pruebe que si $A_n \subseteq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $A \subseteq B$.

(d) Pruebe que si (X, d) es totalmente acotado, entonces $(\mathcal{F}, \rho)$ también lo es.

P2. Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que X es separable si y sólo si todo recubrimiento por abiertos tiene un subrecubrimiento numerable.

P3. Sea (X, d) un espacio métrico y $\varepsilon > 0$. Se dice que X tiene una ε-red si existen $x_1, \ldots, x_N \in X$ tales que $X \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_N, \varepsilon)$.

(a) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos de X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n tiene una $\frac{1}{n}$-red. Muestre que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es totalmente acotado.

(b) Si X tiene una ε-red, muestre que todo subconjunto $A \subseteq X$ tiene una 2ε-red.

(c) Muestre que (X, d) no es totalmente acotado si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ y un conjunto infinito $A \subseteq X$ tal que $d(x, y) \geq \varepsilon$ para todo $x, y \in A$, $x \neq y$.

(d) Pruebe que (X, d) es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión tiene una subsucesión de Cauchy.

(e) Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia monótona creciente de subconjuntos de X. Demuestre que

$$\operatorname{diam}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sup \{ \operatorname{diam} A_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

P4. Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función analítica tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k_x)}(x) = 0$. Demuestre que f es un polinomio.

Indicación. Recuerde que si f es analítica y se anula en un conjunto abierto, entonces es constante.

P5. Sean (X,d) e (Y,ρ) dos espacios métricos y supongamos que X es completo. Sea (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{C}(X,Y)$ que converge puntualmente a una función f. Sea $C = \{a \in X \mid f \text{ es continua en } a\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $p \in \mathbb{N}$, se define

$$F_p(\varepsilon) \doteq \{x \in X \mid \forall m,n \geq p, \rho(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon\}$$

(a) Sea $\Omega(\varepsilon) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{Int}(F_p(\varepsilon))$. Muestre que $\Omega(\varepsilon)$ es denso en X.

(b) Sea $a \in \Omega(\varepsilon)$. Muestre que existe $r_a > 0$ tal que, para todo $x \in B(a, r_a)$, $\rho(f(x), f(a)) \leq 3\varepsilon$.

(c) Sea $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega(1/k)$. Muestre que $\overline{A} = X$ y que $A \subseteq C$. Concluya que C es denso en X.

P6. Sea Ω un conjunto finito y en $\Omega^{\mathbb{Z}}$ se define la función

$$d(x,y) = 2^{-\operatorname{ínf}\{n\geq 0 \mid x_{[-n,n]} \neq y_{[-n,n]}\}}$$

Donde $x_{[-n,n]}$ es la restricción de x a $[-n,n] \cap \mathbb{Z}$ y además, por convención, $\operatorname{ínf} \varnothing = +\infty$.

(a) Muestre que d define una distancia sobre $\Omega^{\mathbb{Z}}$ que además es una ultramétrica.

(b) Demuestre que $(\Omega^{\mathbb{Z}}, d)$ es compacto.

(c) Pruebe que $\Omega^{\mathbb{Z}}$ no tiene puntos aislados.
Indicación. Ocupe el teorema de Baire.

P7. Sea $(X,\cdot)$ un grupo abeliano dotado de una métrica d tal que la multiplicación y la inversa son continuas. Supongamos que (X,d) es compacto. Se demostrará que no existe un isomorfismo de $(\mathbb{R},+)$ a $(X,\cdot)$. Supongamos por contradicción que existe $T\colon (\mathbb{R},+) \to (X,\cdot)$ un isomorfismo.

(a) Para $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = [-n,n]$. Muestre que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $T(I_p)$ tiene interior no vacío.

(b) Muestre que existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que $T^{-1}(X) = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + I_p)$. Concluya.

P8. **(Teorema de Osgood)** Sea (X,d) un espacio métrico completo y $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de funciones en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ puntualmente acotadas, es decir, para cada $x \in X$ existe una constante $M_x \geq 0$ tal que

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} |f_\lambda(x)| \leq M_x.$$

Pruebe que existe un abierto no vacío V y una constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{x\in V, \lambda\in\Lambda} |f_\lambda(x)| \leq M.$$

P9. Demuestre que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces no puede tener una base de Hamel numerable.

P10. Considere el espacio métrico $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$ donde d_∞ es la métrica uniforme. Se dice que $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ es **nunca monótona** si no existe ningún intervalo cerrado $[a,b]$ con $a < b$ donde f sea monótona. El objetivo de este problema es probar que el conjunto de todas las funciones continuas nunca monótonas sobre $[0,1]$ es denso en $\mathcal{C}[0,1]$.

(a) Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de todos los subintervalos cerrados de $[0,1]$ con extremos racionales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el conjunto

$$C_n \doteq \{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid f \text{ es no decreciente en } I_n\}.$$

Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, C_n es un conjunto cerrado.

(b) Análogamente se definen los conjuntos

$$D_n \doteq \{f \in \mathcal{C}[0,1] \mid f \text{ es no creciente en } I_n\}.$$

Muestre que $G_n = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \setminus (C_n \cup D_n)$ es abierto y denso en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Concluya.

P11. Un número $z \in \mathbb{C}$ se dice **trascendente** si no es raíz de ningún polinomio $p \in \mathbb{Z}[X]$. Denotaremos por $T_\mathbb{R}$ al conjunto de todos los números reales trascendentes. Un **número de Liouville** es un irracional $x \in \mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q > 1$ tales que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

(a) Pruebe que el conjunto de los números de Liouville es denso en $\mathbb{R}$. Para ello, para p, q coprimos defina los intervalos

$$I_{pq} = \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$$

y use el teorema de Baire.

(b) Demuestre que todo número real se puede escribir como suma de dos números de Liouville.