Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
21 de junio de 2012

Ejercicio 3: Compacidad

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. Sea X un espacio topológico normal y tal que $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) X es pseudo-compacto (es decir, toda función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ es acotada).

(ii) Para toda familia $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos no vacíos encajonados (i.e. $O_n \supseteq O_{n+1}$), se tiene que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{O_n} \neq \varnothing.$$

(iii) Todo recubrimiento abierto numerable $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X, tiene un subrecubrimiento finito cuyas clausuras recubren X, es decir,

$$\exists J \subseteq \mathbb{N} \text{ con } |J| < \infty,\ X = \bigcup_{j\in J} \overline{O_j}.$$

Indicación. Para **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** razone por contradicción y utilice el Lema de Urysohn de forma adecuada sobre los conjuntos $\{x_n\}$ y O_n^c, con $x_n \in O_n$, para construir una familia de funciones g_n tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ sea continua y no acotada.

Solución:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que existe una familia $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no verifica **(ii)**. Sea $x_n \in O_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el lema de Urysohn, existe $g_n\colon X \to [0,n]$ continua tal que $g_n(x_n) = n$ y $g_n(O_n^c) = \{0\}$. Tomemos $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ y veamos que g es continua. Dado $x \in X$, si toda vecindad de x intersecta a O_n para infinitos $n \in \mathbb{N}$ entonces, como los O_n son encajonados, los intersecta a todos y por lo tanto tendríamos que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{O_n}$, que no puede ser. Luego, existe una vecindad V de x tal que V intersecta a O_n para finitos valores de $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $J \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que para todo $y \in V$ tenemos que $g_n(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus J$. Esto muestra que $g(y) = \sum_{n\in J} g_n(y)$ con J finito, por lo que g es localmente una suma finita de funciones continuas y es continua en x. Como $g_n(x_n) = n$, g es claramente no acotada, lo que contradice **(i)**.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento abierto numerable. Sea $U_n \doteq X \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{O_i}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\overline{U_n} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \overline{\overline{O_i}^c} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \overline{O_i^c} = \bigcap_{i=1}^n O_i^c.$$

Si algún U_n es vacío, obtenemos que $X = \bigcup_{i=1}^n \overline{O_i}$, que es lo pedido. Si todos fueran no vacíos, por **(ii)**, tendríamos que $\varnothing \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_i^c$, por lo que $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no sería un recubrimiento.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua. Los conjuntos $O_n = f^{-1}((-n,n))$ son abiertos y recubren X, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^N \overline{f^{-1}((-n,n))} \subseteq \bigcup_{i=1}^N f^{-1}(\overline{(-n,n)}) = \bigcup_{i=1}^N f^{-1}([-n,n]) = f^{-1}([-N,N]),$$

ya que, como f es continua, $f^{-1}([-n,n])$ es un cerrado que contiene a $f^{-1}((-n,n))$, por lo que contiene a su adherencia. Así, $|f(x)| \leq N$ para todo $x \in X$ y f es acotada.