Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
11 de abril de 2012

Trabajo Dirigido 1: Espacios Métricos

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. Sea (X,d) un espacio métrico acotado, es decir, existe $M>0$ tal que $d(x,y)\leq M$ para todo $x,y\in X$. Definimos la familia

$$\mathcal{F} \doteq \{A\subseteq X \mid A \text{ cerrado y no vacío}\}\subseteq \mathcal{P}(X).$$

(a) Considere la función $\rho\colon \mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ definida por

$$(A,B)\mapsto \rho(A,B)=\text{máx}\left\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{x\in B} d(x,A)\right\}.$$

Muestre que ρ es una métrica en $\mathcal{F}$.

Solución: Es claro que $\rho(A,B)\geq 0$. Veamos que cumple las tres propiedades de una métrica:

- Separación:

$$\begin{aligned}
\rho(A,B)=0 &\iff \text{máx}\left\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{x\in B} d(x,A)\right\}=0\\
&\iff \sup_{x\in A} d(x,B)=0 \wedge \sup_{x\in B} d(x,A)=0\\
&\iff d(x,B)=0 \quad \forall x\in A \wedge d(x,A)=0 \quad \forall x\in B\\
&\iff x\in\overline{B} \quad \forall x\in A\wedge x\in\overline{A}\quad \forall x\in B\\
&\iff x\in B \quad \forall x\in A\wedge x\in A\quad \forall x\in B \qquad\qquad \text{(Porque } A \text{ y } B \text{ son cerrados)}\\
&\iff A\subseteq B\wedge B\subseteq A\\
&\iff A=B
\end{aligned}$$

- Simetría: evidente.
- Desigualdad triangular: Debemos verificar que $\rho(A,B)\leq\rho(A,C)+\rho(B,C)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\rho(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B)$. Así, dados $x\in A, y\in B, z\in C$, se tiene que $d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)$. Tomando ínfimo sobre los $y\in B$:

$$\begin{aligned}
d(x,B)&\leq d(x,z)+d(z,B)\\
&\leq d(x,z)+\sup_{w\in C} d(w,B)\\
&\leq d(x,z)+\rho(B,C).
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre los $z\in C$ en la desigualdad, se obtiene que

$$\begin{aligned}
d(x,B)&\leq d(x,C)+\rho(B,C)\\
&\leq \sup_{w\in A} d(w,C)+\rho(B,C)\\
&\leq \rho(A,C)+\rho(B,C).
\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre los $x\in A$, se concluye que $\rho(A,B)\leq\rho(A,C)+\rho(B,C)$.

(b) Dado $\varepsilon>0$ y $A\in\mathcal{F}$, se define la nube de centro A y radio ε como

$$N(\varepsilon,A)=\{x\in X \mid \exists a\in A, d(x,a)<\varepsilon\}=\bigcup_{a\in A} B'(a,\varepsilon)$$

Pruebe que $\rho(A,B)=\text{ínf}\{\varepsilon>0 \mid A\subseteq N(\varepsilon,B), B\subseteq N(\varepsilon,A)\}$.

Solución: Supongamos sin pérdida de generalidad que $\rho(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B)$ y sea

$$S = \{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\}.$$

$\leq$) Sea $\varepsilon \in S$. Así, para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x \in B'(y,\varepsilon)$, es decir, $d(x,y) < \varepsilon$. Luego, $d(x,B) \leq d(x,y) < \varepsilon$. Como esto se cumple para todo $x \in A$, tomando supremo se obtiene que $\rho(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B) \leq \varepsilon$. Tomando ínfimo sobre los $\varepsilon \in S$ se concluye lo pedido.

$\geq$) Sea $\delta > 0$. Veamos que $\rho(A,B) + \delta \in S$.
Sea $x \in A$. Por definición, $d(x,B) \leq \rho(A,B) < \rho(A,B) + \delta$, por lo que existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \rho(A,B) + \delta$, es decir, $x \in N(\rho(A,B)+\delta, B)$, lo que significa que $A \subseteq N(\rho(A,B)+\delta, B)$. Análogamente, $B \subseteq N(\rho(A,B)+\delta, A)$, por lo que $\rho(A,B)+\delta \in S$. Así, $\rho(A,B)+\delta \geq \operatorname{ínf} S$ para todo $\delta > 0$, por lo que tomando $\delta \to 0$ se obtiene que $\rho(A,B) \geq \operatorname{ínf} S$.

(c) Sea $F_n = \{A \subseteq X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}$. Pruebe que si X es compacto, entonces el conjunto $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es denso en $\mathcal{F}$.

Solución: Sean $A \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$. Veamos que existe un conjunto finito R tal que $\rho(R,A) \leq \varepsilon$.

Como X es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto, por lo que A es compacto. Consideremos el recubrimiento abierto $\{B'_d(x,\varepsilon)\}_{x\in A}$ de A. Por la compacidad de A, existen finitos $x_1,\ldots,x_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B'_d(x_i,\varepsilon)$.

Tomemos $R = \{x_1,\ldots,x_n\}$. Claramente, $A \subseteq N(R,\varepsilon) = \bigcup_{i=1} B'_d(x_i,\varepsilon)$. Además, como $R \subseteq A$ y $A \subseteq N(A,\varepsilon)$, se tiene que $R \subseteq N(A,\varepsilon)$. Por la parte anterior, esto implica que $\rho(R,A) \leq \varepsilon$.

(d) Sea (A_n) una sucesión en $(\mathcal{F},\rho)$ convergente a A. Pruebe que si (x_n) es una sucesión en (X,d) convergente a $x \in X$ tal que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in A$.

Solución: Como A es cerrado, basta verificar que $x \in \overline{A}$, o equivalentemente que $d(x,A) = 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x,A) &\leq d(x,x_n) + d(x_n,A) \\ &\leq d(x,x_n) + \rho(A_n,A) \to 0, \end{aligned}$$

por lo que $d(x,A) = 0$.