Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
27 de marzo de 2012

Guía 1: Espacios Vectoriales Normados

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. Sea $\vec{E}$ un espacio vectorial normado.

(a) Sea A un conjunto abierto en $\vec{E}$. Muestre que dado $S \subseteq \vec{E}$, el conjunto $A + S$ es abierto.

(b) Muestre dos conjuntos $C_1, C_2 \subseteq \vec{E}$ cerrados tales que $C_1 + C_2$ no es cerrado.

(c) Sea K un compacto y C cerrado. Muestre que $K + C$ es cerrado.

(d) Suponga ademas que $\vec{E}$ es espacio de Banach. Si $\vec{F}, \vec{G}$ son dos sub-e.v. cerrados y $\dim \vec{F} < \infty$ entonces $\vec{F} + \vec{G}$ es cerrado en $\vec{E}$.

P2. Sea $\phi : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ la función definida por

$$f \mapsto \phi(f)(x) = \int_0^x f(s)ds.$$

(a) Muestre que ϕ no es contractante, pero $\phi \circ \phi$ sí lo es.

(b) Muestre que ϕ tiene un único punto fijo.

P3. Sea $\vec{E}$ un e.v.n y $\vec{F} \subseteq \vec{E}$ un sub-e.v. de interior no vacío. Demuestre que $\vec{F} = \vec{E}$.

P4. Sean $\vec{E}, \vec{F}$ dos e.v.n.. Diremos que una función lineal $T : \vec{E} \to \vec{F}$ es compacta si para todo conjunto acotado $A \subseteq \vec{E}$, $\overline{T(A)}$ es compacto en $\vec{F}$. El conjunto de todas las funciones lineales compactas de $\vec{E}$ en $\vec{F}$ se denotará por $\mathcal{LK}(\vec{E}, \vec{F})$.

(a) Sea $T : \vec{E} \to \vec{F}$ lineal. Pruebe que T es compacta si y sólo si $\overline{T(B_{\vec{E}}(\vec{0}, 1))}$ es compacta.

(b) Pruebe que toda función lineal compacta es continua y así concluya que $\mathcal{LK}(\vec{E}, \vec{F}) \subseteq \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$.

(c) Demuestre que $\mathcal{LK}(\vec{E}, \vec{F})$ es un sub-e.v. de $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$.

(d) Pruebe que si $T : \vec{E} \to \vec{F}$ es una función lineal continua y $\dim T(\vec{E}) < \infty$, entonces T es compacta.

P5. Sea $\vec{E}$ un espacio de Banach y $f : \vec{E} \to \mathbb{R}$ una función s.c.i. e inferiormente acotada. Sean $\varepsilon > 0$ y $\vec{z} \in \vec{E}$ tales que $f(\vec{z}) < \inf_{\vec{x} \in \vec{E}} f(\vec{x}) + \varepsilon$. El objetivo de este problema es probar que existe $\vec{y} \in \vec{E}$ tal que

(1) $f(\vec{y}) \leq f(\vec{z})$,

(2) $\|\vec{z} - \vec{y}\| \leq 1$ y

(3) $f(\vec{x}) > f(\vec{y}) - \varepsilon\|\vec{y} - \vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \neq \vec{y}$.

Para esto considere la sucesión definida por $\vec{z}_0 = \vec{z}$ y dado $\vec{z}_n$ considerar

$$S_n = \{\vec{x} \in \vec{E} \ \mid \ f(\vec{x}) + \varepsilon\|\vec{x} - \vec{z}_n\| \leq f(\vec{z}_n)\}$$

Luego escoger $\vec{z}_{n+1} = \vec{z}_n$ si $\inf_{\vec{x} \in S_n} = f(\vec{z}_n)$ o $\vec{z}_{n+1} \in S_n$ que verifique $f(\vec{z}_{n+1}) < f(\vec{z}_n)$ en caso contrario.

(a) Pruebe que la sucesión $(\vec{z}_n)$ converge a algún $\vec{y} \in \vec{E}$ que además verifica (1) y (2).

(b) Pruebe que $\bigcap_{n \geq 0} S_n = \{\vec{y}\}$.

(c) Concluya.

(d) Ocupe el resultado anterior para probar el siguiente teorema:
Sea $\vec{E}$ un espacio de Banach y $f : \vec{E} \to \vec{E}$ una función que verifica

$$\|\vec{x} - f(\vec{x})\| \leq \varphi(\vec{x}) - \varphi(f(\vec{x})) \text{ para todo } \vec{x} \in \vec{E},$$

donde $\varphi : \vec{E} \to \mathbb{R}$ es una función s.c.i. acotada inferiormente. Entonces f tiene un punto fijo.

P6. Para $\alpha \in (0,1)$ se define $\mathcal{C}^\alpha[0,1]$ como el conjunto de las funciones de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ tales que

$$|f|_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Las funciones en $\mathcal{C}^\alpha[0,1]$ se llaman funciones **α-Hölder**.

(a) Pruebe que $\|\cdot\|_\alpha = |\cdot|_\alpha + \|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\mathcal{C}^\alpha[0,1]$.

(b) Pruebe que la bola cerrada unitaria B_α en $\mathcal{C}^\alpha[0,1]$ es compacta en $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.
Indicación. Dada una sucesión (f_n) en B_α, muestre que existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que para todo racional $p \in \mathbb{Q}$, la sucesión $(f_{n_k}(p))$ converge. Use el argumento diagonal.

P7. Sea $\vec{E}$ un e.v.n. y $f : \vec{E} \to \mathbb{R}$ una función lineal.

(a) Pruebe que f es continua si y sólo si toda sucesión $(\vec{x}_n)$ con $\vec{x}_n \to 0$ verifica que $(f(\vec{x}_n))$ es acotada.

(b) Si f no es continua, pruebe que para todo $r > 0$ se tiene que $f(B(\vec{0}, r)) = \mathbb{R}$.

(c) Si f no es continua, pruebe que $\ker f$ es denso en $\vec{E}$.

(d) Si $A \subseteq \vec{E}$ es de interior no vacío y existe $a \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\vec{x} \in A$ se cumple que $f(\vec{x}) \geq a$, pruebe que f es continua.

P8. Sea $\vec{E}$ un e.v.n. de dimensión infinita. El objetivo es probar que la bola unitaria no es compacta. Para ello proceda como sigue:

(a) Considere una colección $\{\vec{x}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de vectores linealmente independientes (justifique su existencia). Defina $\vec{E}_n = \langle\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}\rangle$ y pruebe que $d(\vec{x}_n, \vec{E}_{n-1}) = \alpha > 0$.

(b) Pruebe que existe $\vec{x}^* \in \vec{E}_{n-1}$ tal que $\|\vec{x}_n - \vec{x}^*\| < 2\alpha$ y muestre que $d(\vec{x}_n - \vec{x}^*, \vec{E}_{n-1}) = \alpha$. Para concluir, construya una sucesión $(\vec{y}_n) \subseteq B(0,1)$ tal que $\vec{y}_n \in \vec{E}_n$ y $d(\vec{y}_n, \vec{E}_{n-1}) > \frac{1}{2}$.

P9. Sean $\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$ tres e.v.n.. Sean $S \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ y $T \in \mathcal{L}(\vec{F}, \vec{G})$. Probar que $T \circ S \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{G})$ y que $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.

P10. El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado.
Teorema. Un e.v.n. $\vec{E}$ es un espacio de Banach si y sólo si para toda sucesión $(\vec{x}_n) \subseteq \vec{E}$ tal que $\sum \|\vec{x}_n\|$ es convergente, se tiene que $\sum \vec{x}_n$ también converge.

Se propone el siguiente esquema de demostración:

(a) Asumiendo que $\vec{E}$ es Banach y que la serie es absolutamente convergente, defina $S_n = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i$, la sucesión de sumas parciales, y pruebe que es de Cauchy.

(b) Pruebe que para toda sucesión de Cauchy en $\vec{E}$, se puede extraer una subsucesión $(\vec{x}_{n_k})$ que verifique

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ \ \|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}_{n_{k+1}}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Use este resultado para probar la implicancia restante.