Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
21 de abril de 2012

Control 1: Espacios Vectoriales Normados y Métricos

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. **(a)** [*2.0 pts.*] Sea $\{(X_n, \|\cdot\|_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de espacios de Banach. Se define el conjunto

$$X \doteq \left\{ x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x(n)\|_n < \infty \right\}.$$

En X se define la aplicación $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ por $\|x\| \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x(n)\|_n$. Pruebe que $(X, \|\cdot\|)$ es un e.v.n. y que además es Banach.

(b) [*4.0 pts.*] Sean $\vec{E}, \vec{F}$ dos e.v.n.. Diremos que una función lineal $T : \vec{E} \to \vec{F}$ es compacta si para todo conjunto acotado $A \subseteq \vec{E}$, $\overline{T(A)}$ es compacto en $\vec{F}$. El conjunto de todas las funciones lineales compactas de $\vec{E}$ en $\vec{F}$ se denotará por $\mathcal{LK}(\vec{E}, \vec{F})$.

i) [*1.0 pts.*] Sea $T : \vec{E} \to \vec{F}$ lineal. Pruebe que T es compacta si y sólo si $\overline{T(B_{\vec{E}}(\vec{0}, 1))}$ es compacta.

ii) [*1.0 pts.*] Pruebe que toda función lineal compacta es continua y así concluya que $\mathcal{LK}(\vec{E}, \vec{F}) \subseteq \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$.

iii) [*1.0 pts.*] Demuestre que $\mathcal{LK}(\vec{E}, \vec{F})$ es un sub-e.v. de $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$.

iv) [*1.0 pts.*] Pruebe que si $T : \vec{E} \to \vec{F}$ es una función lineal continua y $\dim T(\vec{E}) < \infty$, entonces T es compacta.

Solución:

(a) Veamos primero que $\|\cdot\|$ es norma:

- Separación:

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\iff \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x(n)\|_n = 0 \\ &\iff \|x(n)\|_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\iff x(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

- Homotecia:

$$\|\lambda x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda x(n)\|_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda| \|x(n)\|_n = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x(n)\|_n = |\lambda| \|x\|.$$

- Desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(x + y)(n)\|_n \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x(n) + y(n)\|_n \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} (\|x(n)\|_n + \|y(n)\|_n) \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x(n)\|_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y(n)\|_n \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Por lo que $\|\cdot\|$ es una norma en X.

Veamos ahora que X es Banach. Sea $(x_k)_k$ una sucesión de Cauchy en X. Dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_i - x_j\| \leq \varepsilon \quad \forall i, j \geq K.$$

Además, para $n \in \mathbb{N}$ fijo:

$$\|x_i(n) - x_j(n)\|_n \leq \|x_i - x_j\| \leq \varepsilon \quad \forall i, j \geq K, \tag{$*$}$$

por lo que la sucesión $(x_k(n))_k$ es de Cauchy en X_n. Como X_n es Banach, se tiene que $x_k(n) \xrightarrow{k} x_n \in X_n$. Definamos $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ por $x(n) \doteq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $x \in X$, es decir, que $\|x\| < \infty$. Tomando límite en i en $(*)$, obtenemos

$$\|x(n) - x_j(n)\| \leq \varepsilon \implies \|x(n)\| \leq \|x_j(n)\| + \varepsilon \tag{$**$}$$

para todo $j \geq K$. Tomando $j = K$ y supremo en la última desigualdad:

$$\|x\| \leq \|x_K\| + \varepsilon < \infty$$

porque $x_K \in X$. Así, $x \in X$. Finalmente, tomando supremo en la primera desigualdad de $(**)$ se obtiene que

$$\|x - x_j\| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq K$$

que significa que $x_k \to x$.

(b) **i)** Si T es compacta, como $B(\vec{0}, 1)$ es un conjunto acotado se tiene que $\overline{T(B(\vec{0}, 1))}$ es compacta.
Supongamos que $\overline{T(B(\vec{0}, 1))}$ es compacta. Sea $A \subseteq \vec{E}$ acotado, es decir, tal que existe $r > 0$ con $A \subseteq B(\vec{0}, r)$. Se tiene que

$$T(A) \subseteq T(B(\vec{0}, r)) = T(rB(\vec{0}, 1)) = rT(B(\vec{0}, 1))$$

porque T es lineal.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in \overline{rT(B(\vec{0}, 1))} &\iff \exists \vec{x}_n \in rT(B(\vec{0}, 1)) \text{ tal que } \vec{x}_n \to \vec{x} \\
&\iff \exists \vec{x}_n \in T(B(\vec{0}, 1)) \text{ tal que } r\vec{x}_n \to \vec{x} \\
&\iff \exists \vec{x}_n \in T(B(\vec{0}, 1)) \text{ tal que } \vec{x}_n \to \frac{\vec{x}}{r} \\
&\iff \frac{\vec{x}}{r} \in \overline{T(B(\vec{0}, 1))} \\
&\iff \vec{x} \in r\overline{T(B(\vec{0}, 1))}
\end{aligned}$$

por lo que $\overline{rT(B(\vec{0}, 1))} = r\overline{T(B(\vec{0}, 1))}$. Como $\overline{T(B(\vec{0}, 1))}$ es compacta y la función $\vec{x} \mapsto r\vec{x}$ es continua, se concluye que $r\overline{T(B(\vec{0}, 1))}$ es compacto. Finalmente, como $T(A) \subseteq rT(B(\vec{0}, 1))$, se tiene que $\overline{T(A)} \subseteq r\overline{T(B(\vec{0}, 1))}$, es decir, $\overline{T(A)}$ es cerrado y está contenido en un compacto, por lo que es compacto. Así, T es compacta.

ii) Si T es compacta, $\overline{T(B(\vec{0}, 1))}$ es compacta y, en particular, es un conjunto cerrado y acotado. Luego, $T(B(\vec{0}, 1))$ también es un conjunto acotado, por lo que T es acotada en una bola, lo que implica que es continua.

iii) Sean S, T compactas. Se tiene que

$$(\lambda T)(B(\vec{0}, 1)) = \lambda T(B(\vec{0}, 1)) = T(B(\vec{0}, \lambda))$$

por la linealidad de T. Luego, $\overline{(\lambda T)(B(\vec{0},1))} = \overline{T(B(\vec{0},\lambda))}$ es compacta porque T es compacta y, por **(a)**, λT es compacta.

Dados $A, B \subseteq \vec{E}$ compactos, veamos que $A+B$ es compacto. Si $(\vec{x}_n)$ es una sucesión en $A+B$, entonces $\vec{x}_n = \vec{a}_n + \vec{b}_n$ con $\vec{a}_n \in A, \vec{b}_n \in B$. Como A es compacto, existe $\vec{a}_{n_k} \to \vec{a} \in A$ y, como B es compacto, existe $\vec{b}_{n_{k_j}} \to \vec{b} \in B$. Luego,

$$\vec{x}_{n_{k_j}} = \vec{a}_{n_{k_j}} + \vec{b}_{n_{k_j}} \to \vec{a} + \vec{b} \in A + B.$$

Así, $\overline{T(B(\vec{0},1))} + \overline{S(B(\vec{0},1))}$ es un conjunto compacto. En particular, $\overline{T(B(\vec{0},1))} + \overline{S(B(\vec{0},1))}$ es cerrado y, como $T(B(\vec{0},1)) + S(B(\vec{0},1)) \subseteq \overline{T(B(\vec{0},1))} + \overline{S(B(\vec{0},1))}$, se concluye que

$$\overline{T(B(\vec{0},1)) + S(B(\vec{0},1))} \subseteq \overline{T(B(\vec{0},1))} + \overline{S(B(\vec{0},1))}$$

(porque la adherencia de un conjunto es el menor cerrado que contiene al conjunto). Así,

$$\overline{(T+S)(B(\vec{0},1))} = \overline{T(B(\vec{0},1)) + S(B(\vec{0},1))} \subseteq \overline{T(B(\vec{0},1))} + \overline{S(B(\vec{0},1))}$$

por lo que $\overline{(T+S)(B(\vec{0},1))}$ es un conjunto cerrado contenido en un conjunto compacto y entonces es compacto. Luego, por **(a)**, $T+S$ es compacta.

iv) Sea $\|\cdot\|_{\vec{F}}$ la norma en $\vec{F}$. Consideremos $\|\cdot\|_{T(\vec{E})} = \|\cdot\|_{\vec{F}}|_{T(\vec{E})}$, la restricción de $\|\cdot\|_{\vec{F}}$ a $T(\vec{E})$. Como $T(\vec{E})$ es un sub-e.v. de dimensión finita $\vec{F}$, se tiene que $(T(\vec{E}), \|\cdot\|_{T(\vec{E})})$ es un e.v.n. de dimensión finita.

Como T es continua, $T(B(\vec{0},1))$ es un conjunto acotado en el e.v.n. $(\vec{F}, \|\cdot\|_{\vec{F}})$. Consideremos los conjuntos, $A \doteq \overline{T(B(\vec{0},1))}^{\vec{F}}$ (la adherencia de $T(B(\vec{0},1))$ en el e.v.n. $\vec{F}$) y $B \doteq \overline{T(B(\vec{0},1))}^{T(\vec{E})}$ (la adherencia de $T(B(\vec{0},1))$ en el e.v.n. $T(\vec{E})$). Como $T(\vec{E})$ es de dimensión finita, es cerrado en $\vec{F}$. Además,

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in A &\iff \exists \vec{x}_n \in T(B(\vec{0},1)) \text{ tal que } \|\vec{x}_n - \vec{x}\|_{\vec{F}} \to 0 \\
&\iff \exists \vec{x}_n \in T(B(\vec{0},1)) \text{ tal que } \|\vec{x}_n - \vec{x}\|_{T(\vec{E})} \to 0 \\
&\iff \vec{x} \in B
\end{aligned}$$

ya que $A \subseteq T(\vec{E})$ y $\|\cdot\|_{\vec{F}}$ y $\|\cdot\|_{T(\vec{E})}$ coinciden en $T(\vec{E})$. Luego, $A = B$. Se tiene que A es compacto en $T(\vec{E})$ porque es cerrado y acotado. Luego, dada una sucesión $(\vec{x}_n)$ en A, existe $(\vec{x}_{n_k})$ y $\vec{x} \in A$ con $\|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}\|_{T(\vec{E})} \to 0$. Como $\vec{x} \in A \subseteq T(\vec{E})$, se tiene que $\vec{x}_{n_k} - \vec{x} \in T(\vec{E})$ y, como $\|\cdot\|_{\vec{F}}$ y $\|\cdot\|_{T(\vec{E})}$ coinciden en $T(\vec{E})$, se concluye que $\|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}\|_{\vec{F}} \to 0$, es decir, $(\vec{x}_n)$ tiene una subsucesión convergente a un elemento de A en el e.v.n. $(\vec{F}, \|\cdot\|_{\vec{F}})$, por lo que es compacto. Así, T es compacta por **(a)**.

P2. El objetivo de este problema es construir la compleción de un espacio métrico de una manera alternativa a la vista en clases. Sea (X, d) un espacio métrico y consideremos el conjunto

$$\tilde{X} \doteq \{(x_n) \mid (x_n) \text{ es una sucesión de Cauchy en } X\}.$$

Se define en $\tilde{X}$ la relación de equivalencia

$$(x_n)\mathcal{R}(y_n) \iff d(x_n, y_n) \to 0.$$

Sobre el cociente $\tilde{X}/\mathcal{R}$ se define la aplicación $\rho\colon \tilde{X}/\mathcal{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\rho([(x_n)], [(y_n)]) \doteq \lim d(x_n, y_n).$$

(a) [*1.0 pts.*] Pruebe que ρ está bien definida y que es una métrica en $\tilde{X}/\mathcal{R}$.

(b) [*2.0 pts.*] Pruebe que el espacio $(\tilde{X}/\mathcal{R}, \rho)$ es completo.
Indicación. Considere una sucesión de Cauchy en $(\tilde{X}/\mathcal{R}, \rho)$ y construya su límite usando el argumento diagonal.

(c) [*2.0 pts.*] Pruebe que (X, d) es isométrico a un subconjunto de $\tilde{X}/\mathcal{R}$. Defina entonces una compleción de X en $\tilde{X}/\mathcal{R}$ y demuestre que si (X, d) es e.v.n., en el sentido que X es e.v. y d está definida por una norma, entonces $(\tilde{X}/\mathcal{R}, \rho)$ es espacio de Banach.

(d) [*1.0 pts.*] Pruebe que si (X, d) es completo, entonces es isométrico a $(\tilde{X}/\mathcal{R}, \rho)$.

Solución:

(a) Sean $(x_n), (x'_n), (y_n), (y'_n) \in \tilde{X}$ tales que $[(x_n)] = [(x'_n)]$ y $[(y_n)] = [(y'_n)]$. Por definición, esto significa que $\lim d(x_n, x'_n) = 0 = \lim d(y_n, y'_n)$. Veamos que $\rho([(x_n)], [(y_n)]) = \rho([(x'_n)], [(y'_n)])$:

$$\begin{aligned}\rho([(x_n)], [(y_n)]) = \lim d(x_n, y_n) &= \lim d(x'_n, x_n) + \lim d(x_n, y_n) + \lim d(y_n, y'_n) \\ &= \lim(d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n)) \\ &\geq \lim d(x'_n, y'_n) = \rho([(x'_n)], [(y'_n)]).\end{aligned}$$

La desigualdad contraria se prueba de forma análoga. Así, ρ es indepentiende del representante. Veamos ahora que el límite existe. Dadas dos sucesiones de Cauchy $(x_n), (y_n)$, se tiene que

$$\begin{aligned}d(x_i, y_i) &\leq d(x_i, x_j) + d(x_j, y_j) + d(y_j, y_i) \\ d(x_j, y_j) &\leq d(x_j, x_i) + d(x_i, y_i) + d(y_i, y_j)\end{aligned}$$

lo que implica que $|d(x_i, y_i) - d(x_j, x_j)| \leq d(x_i, x_j) + d(y_i, y_j)$, por lo que la sucesión $d(x_n, y_n)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y es convergente. Así, ρ está bien definida.

Veamos ahora que ρ es métrica:

- Positividad: $\rho([(x_n)], [(y_n)]) = \lim d(x_n, y_n) \geq 0$ porque $d(x_n, y_n) \geq 0$.
- Separación: $\rho([(x_n)], [(y_n)]) = 0 \iff \lim d(x_n, y_n) = 0 \iff [(x_n)] = [(y_n)]$ por definición de $\mathcal{R}$.
- Simetría: $\rho([(x_n)], [(y_n)]) = \lim d(x_n, y_n) = \lim d(y_n, x_n) = \rho([(y_n)], [(x_n)])$ por la simetría de d.
- Desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}\rho([(x_n)], [(y_n)]) &= \lim d(x_n, y_n) \leq \lim(d(x_n, z_n) + d(y_n, z_n)) \\ &= \lim d(x_n, z_n) + \lim d(y_n, z_n) \\ &= \rho([(x_n)], [(z_n)]) + \rho([(y_n)], [(z_n)])\end{aligned}$$

por la desigualdad triangular de d.

(b) Sea $([(x^k_n)_n])_k$ una sucesión de Cauchy $(\tilde{X}/\mathcal{R}, \rho)$.
Como cada $(x^k_n)_n$ es de Cauchy, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x^k_i, x^k_j) < \frac{1}{k}, \quad \forall i, j \geq N_k.$$

Definimos la sucesión $x_n \doteq x^n_{N_n}$ y veamos que es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $K > {}^3\!/\varepsilon$ tal que $\rho([(x^i_n)_n], [(x^j_n)_n]) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $i, j \geq K$, que existe porque $([(x^k_n)_n])_k$ es de Cauchy. Dados $i, j \geq K$, tomamos $N \geq N_i, N_j$ tal que $d(x^i_N, x^j_N) < \varepsilon/3$, que existe porque $\lim_n d(x^i_n, x^j_n) < \varepsilon/3$. Así,

$$d(x_i, x_j) = d(x^i_{N_i}, x^j_{N_j}) \leq d(x^i_{N_i}, x^i_N) + d(x^i_N, x^j_N) + d(x^j_N, x^j_{N_j}) \leq \frac{1}{i} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{j} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Luego, $(x_n) \in \tilde{X}$. Veamos ahora que $\lim_k [(x_n^k)_n] = [(x_n)_n]$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $K \geq {}^2\!/\varepsilon$ tal que $d(x_i, x_j) \geq {}^\varepsilon\!/2$ para todo $i, j \geq K$, que existe porque (x_n) es de Cauchy. Sea $k \geq K$. Luego, para $n \geq K, N_k$:

$$d(x_n^k, x_n) \leq d(x_n^k, x_{N_k}^k) + d(x_{N_k}^k, x_n) = d(x_n^k, x_{N_k}^k) + d(x_k, x_n) \leq \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que implica, tomando límite en n, que $\rho([(x_n^k)_n], [(x_n)]) = \lim_n d(x_n^k, x_n) \leq \varepsilon$ para todo $k \geq K$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se obtiene que $\lim_k \rho([(x_n^k)_n], [(x_n)]) = 0$, es decir, $\lim_k [(x_n^k)_n] = [(x_n)]$. Hemos probado que toda sucesión de Cauchy en $(\tilde{X}/\mathcal{R}, \rho)$ es convergente, por lo que $(\tilde{X}/\mathcal{R}, \rho)$ es completo.

(c) Definimos la función $\psi \colon X \to \tilde{X}/\mathcal{R}$ por $\psi(x) \doteq [(x)]$, donde $(x) \in \tilde{X}$ es la sucesión constante igual a x. Veamos que ψ es una isometría:

$$d(x, y) = \lim_n d(x, y) = \rho([(x)], [(y)]) = \rho(\psi(x), \psi(y)).$$

Así, X es isométrico a $\psi(X) \subseteq \tilde{X}/\mathcal{R}$. Definimos la compleción de X en $\tilde{X}/\mathcal{R}$ por $\overline{\psi(X)}$.
Si (X, d) es un e.v.n., definimos las siguientes operaciones en $\tilde{X}/\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} [(x_n)] + [(y_n)] &\doteq [(x_n + y_n)] \\ \lambda[(x_n)] &\doteq [(\lambda x_n)]. \end{aligned}$$

Se verifica que si $(x_n), (y_n) \in \tilde{X}$, entonces

$$d(x_i + y_i, x_j + y_j) \leq d(x_i + y_i, x_i + y_j) + d(x_i + y_j, x_j + y_j) = d(y_i, y_j) + d(x_i, x_j),$$

por lo que $(x_n + y_n) \in \tilde{X}$. Además, si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$d(\lambda x_i, \lambda x_j) = |\lambda| d(x_i, x_j),$$

por lo que $(\lambda x_n) \in \tilde{X}$.
Si $[(x_n)] = [(x_n')], [(y_n)] = [(y_n')]$, se tiene que

$$d(x_n + y_n, x_n' + y_n') \leq d(x_n + y_n, x_n + y_n') + d(x_n + y_n', x_n' + y_n') = d(y_n, y_n') + d(x_n, x_n') \to 0$$

y si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$d(\lambda x_n, \lambda x_n') = |\lambda| d(x_n, x_n') \to 0,$$

por lo que las operaciones están bien definidas y $\tilde{X}/\mathcal{R}$ es un espacio vectorial. Veamos que ρ es una norma en $\tilde{X}/\mathcal{R}$:

- Invariancia bajo traslaciones:

$$\begin{aligned} \rho([(x_n)] + [(z_n)], [(y_n)] + [(z_n)]) &= \rho([(x_n + z_n)], [(y_n + z_n)]) \\ &= \lim d(x_n + z_n, y_n + z_n) \\ &= \lim d(x_n, y_n) = \rho([(x_n)], [(y_n)]). \end{aligned}$$

- Homotecia:

$$\rho(\lambda[(x_n)], \lambda[(y_n)]) = \rho([(\lambda x_n)], [(\lambda y_n)]) = \lim d(\lambda x_n, \lambda y_n) = \lim |\lambda| d(x_n, y_n) = |\lambda| \rho([(x_n)], [(y_n)]).$$

Lo anterior, sumado a que ρ es una métrica, implica que ρ está definida por una norma en $\tilde{X}/\mathcal{R}$ y, por lo tanto, $(\tilde{X}/\mathcal{R}, \rho)$ es un e.v.n.. Por la parte anterior, $(\tilde{X}/\mathcal{R}, \rho)$ es además completo, por lo que es un espacio de Banach.

(d) Tenemos por la parte anterior que ψ es una isometría. Basta ver que ψ es además sobreyectiva. Dado $(x_n) \in \tilde{X}$, se tiene que (x_n) es de Cauchy en (X, d) y, como este e.m. es completo, $x_n \to x \in X$. Así, $\lim d(x_n, x) = 0$ por lo que $[(x_n)] = [(x)] = \psi(x)$, que es lo que queríamos probar.

P3. El objetivo de este problema es demostrar que toda función $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ se puede escribir como suma de dos funciones continuas y no diferenciables en todo punto de $[0,1]$. Para ello debe hacer lo siguiente:

(a) [*0.5 pts.*] Demuestre que el conjunto $\mathcal{F} \doteq \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \text{ y } f(1) = 1\}$ es cerrado en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

(b) [*1.0 pts.*] Construiremos una función $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y nunca diferenciable. Para ello considere la función $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definida por

$$\psi(f)(x) \doteq \begin{cases} \frac{3}{4}f(3x) & \text{para } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f(2-3x) & \text{para } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}f(3x-2) & \text{para } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Demuestre que ψ está bien definida, es decir, que $\psi(f) \in \mathcal{F}$ para todo $f \in \mathcal{F}$, y que existe una única función h tal que $\psi(h) = h$. Pruebe además por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo entero $1 \leq k \leq 3^n$ se tiene que

$$\left| h\left(\frac{k-1}{3^n}\right) - h\left(\frac{k}{3^n}\right) \right| \geq 2^{-n}.$$

Concluya que h es nunca diferenciable.

(c) [*1.0 pts.*] Pruebe que las funciones continuas y lineales a trozos son densas en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

(d) [*2.0 pts.*] Para cada natural $n \in \mathbb{N}$ se definen los conjuntos

$$C_n \doteq \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid \exists t \in [0, 1 - {}^{1}\!/_{n}] \text{ tal que } \forall h \in (0, 1-t), |f(t+h) - f(t)| \leq nh\}.$$

Pruebe que los conjuntos C_n son cerrados. Análogamente se definen los conjuntos

$$D_n \doteq \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid \exists t \in [{}^{1}\!/_{n}, 1] \text{ tal que } \forall h \in (0, t), |f(t-h) - f(t)| \leq nh\}.$$

Demuestre que D_n es cerrado y que $G_n \doteq \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \setminus (C_n \cup D_n)$ es un abierto denso.

(e) [*1.0 pts.*] Pruebe que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $G \subseteq X$ es un G_δ denso, entonces todo elemento $x \in X$ puede escribirse como $x = g_1 + g_2$ donde $g_1, g_2 \in G$.

Indicación. Dado $x \in X$ considere el conjunto $G_x \doteq x - G$ y muestre que es G_δ denso.

(f) [*0.5 pts.*] Concluya que toda función $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ puede escribirse como suma de dos funciones nunca diferenciables.

Solución:

(a) Sea (f_n) una sucesión en $\mathcal{F}$ convergente a $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Como f_n convergen uniformemente a f, en particular $f_n(0) \to f(0)$ y $f_n(1) \to f(1)$, pero, como $f_n \in \mathcal{F}$, se tiene que $f_n(0) = 0$ y $f_n(1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $f(0) = \lim f_n(0) = 0$ y $f(1) = \lim f_n(1) = 1$, es decir, $f \in \mathcal{F}$.

(b) Dada $f \in \mathcal{F}$, se tiene que $\psi(f)(0) = \frac{3}{4}f(3 \cdot 0) = \frac{3}{4}f(0) = 0$ y $\psi(f)(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}f(3 - 2 \cdot 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}f(1) = 1$. Además,

$$\frac{3}{4}f\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f\left(2 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right)$$

y

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f\left(2-3\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f\left(3\cdot\frac{2}{3}-2\right)$$

por lo que $\psi(f)$ es continua en $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Por álgebra de funciones continuas, $\psi(f)$ es continua y entonces $\psi(f)\in\mathcal{F}$. Veamos ahora que ψ es contractante:

$$|\psi(f)(x)-\psi(g)(x)|=\begin{cases}\left|\frac{3}{4}f(3x)-\frac{3}{4}g(3x)\right| & \text{para } x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\\ \left|\frac{1}{2}f(2-3x)-\frac{1}{2}g(2-3x)\right| & \text{para } x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\\ \left|\frac{3}{4}f(3x-2)-\frac{3}{4}g(3x-2)\right| & \text{para } x\in\left[\frac{2}{3},1\right]\end{cases}\leq\frac{3}{4}\|f-g\|_\infty.$$

Tomando supremo al lado izquierdo, concluimos que $\|\psi(f)-\psi(g)\|\leq\frac{3}{4}\|f-g\|_\infty$, es decir, ψ es contractante. Como ψ es contractante y va de un conjunto cerrado en sí mismo en un espacio de Banach, por el teorema del punto fijo de Banach existe una única función $h\in\mathcal{F}$ tal que $\psi(h)=h$.
Además,

$$\begin{aligned}\left|h\left(\frac{0}{3}\right)-h\left(\frac{1}{3}\right)\right|&=\left|0-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}\geq 2^{-1}\\ \left|h\left(\frac{1}{3}\right)-h\left(\frac{2}{3}\right)\right|&=\left|\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{2}\geq 2^{-1}\\ \left|h\left(\frac{2}{3}\right)-h\left(\frac{3}{3}\right)\right|&=\left|\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}\geq 2^{-1}\end{aligned}$$

por lo que se tiene el caso base de la inducción. Si suponemos que para $n\in\mathbb{N}$ se verifica

$$\left|h\left(\frac{k-1}{3^n}\right)-h\left(\frac{k}{3^n}\right)\right|\geq 2^{-n},$$

veamos que se tiene para $n+1$.

- Si $1\leq k\leq 3^n$, entonces $0\leq\frac{k-1}{3^{n+1}}\leq\frac{k}{3^{n+1}}\leq\frac{1}{3}$ por lo que

$$\left|h\left(\frac{k-1}{3^{n+1}}\right)-h\left(\frac{k}{3^{n+1}}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}h\left(\frac{k-1}{3^n}\right)-\frac{3}{4}h\left(\frac{k}{3^n}\right)\right|\geq\frac{3}{4}2^{-n}\geq 2^{-n-1}.$$

- Si $3^n+1\leq k\leq 2\cdot 3^n$, entonces $\frac{1}{3}\leq\frac{k-1}{3^{n+1}}\leq\frac{k}{3^{n+1}}\leq\frac{2}{3}$ por lo que

$$\left|h\left(\frac{k-1}{3^{n+1}}\right)-h\left(\frac{k}{3^{n+1}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}h\left(\frac{2\cdot 3^n-k+1}{3^n}\right)-\frac{1}{2}h\left(\frac{2\cdot 3^n-k}{3^n}\right)\right|\geq\frac{1}{2}2^{-n}\geq 2^{-n-1}.$$

  (aplicando la hipótesis de inducción para $k'=2\cdot 3^n-k+1$).

- Si $2\cdot 3^n+1\leq k\leq 3\cdot 3^n$, entonces $\frac{2}{3}\leq\frac{k-1}{3^{n+1}}\leq\frac{k}{3^{n+1}}\leq 1$ por lo que

$$\left|h\left(\frac{k-1}{3^{n+1}}\right)-h\left(\frac{k}{3^{n+1}}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}h\left(\frac{k-2\cdot 3^n-1}{3^n}\right)-\frac{3}{4}h\left(\frac{k-2\cdot 3^n}{3^n}\right)\right|\geq\frac{3}{4}2^{-n}\geq 2^{-n-1}.$$

  (aplicando la hipótesis de inducción para $k'=k-2\cdot 3^n$).

Veamos que h es nunca diferenciable por la derecha. Dado $x\in[0,1)$, para cada $n\geq N$ tomamos $1\leq k\leq 3^n$ tal que $\frac{k-1}{3^n}\leq x\leq\frac{k}{3^n}$, donde N es suficientemente grande para que $\frac{k+1}{3^n}\leq 1$. Definimos (x_n) como 1 si $n<N$ y como $\frac{k}{3^n}$ o $\frac{k+1}{3^n}$ de modo que

$$|h(x_n)-h(x)|=\max\left\{\left|h\left(\frac{k}{3^n}\right)-h(x)\right|,\left|h\left(\frac{k+1}{3^n}\right)-h(x)\right|\right\}$$

para $n \geq N$. Se cumple que $|x_n - x| \leq \frac{2}{3^n}$ y que $x \leq x_n$ para todo $n \geq N$, por lo que $x_n \searrow x$. Por otro lado,

$$2\,|h(x_n) - h(x)| \geq \left|h\left(\frac{k}{3^n}\right) - h(x)\right| + \left|h\left(\frac{k+1}{3^n}\right) - h(x)\right| \geq \left|h\left(\frac{k}{3^n}\right) - h\left(\frac{k+1}{3^n}\right)\right| \geq 2^{-n}$$

para todo $n \geq N$. Luego, para $n \geq N$:

$$\left|\frac{h(x_n) - h(x)}{x_n - x}\right| \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty,$$

por lo que h no es diferenciable por la derecha en x. Luego, h es no diferenciable por la derecha en todo punto de $[0, 1)$.

Veamos ahora que h es nunca diferenciable por la izquierda. Dado $x \in (0, 1]$, para cada $n \geq N$ tomamos $1 \leq k \leq 3^n$ tal que $\frac{k-1}{3^n} \leq x \leq \frac{k}{3^n}$, donde N es suficientemente grande para que $\frac{k-2}{3^n} \geq 0$. Definimos (x_n) como 0 si $n < N$ y como $\frac{k-2}{3^n}$ o $\frac{k-1}{3^n}$ de modo que

$$|h(x_n) - h(x)| = \text{máx}\left\{\left|h\left(\frac{k-2}{3^n}\right) - h(x)\right|, \left|h\left(\frac{k-1}{3^n}\right) - h(x)\right|\right\}$$

para $n \geq N$. Se cumple que $|x_n - x| \leq \frac{2}{3^n}$ y que $x \geq x_n$ para todo $n \geq N$, por lo que $x_n \nearrow x$. Por otro lado,

$$2\,|h(x_n) - h(x)| \geq \left|h\left(\frac{k-2}{3^n}\right) - h(x)\right| + \left|h\left(\frac{k-1}{3^n}\right) - h(x)\right| \geq \left|h\left(\frac{k-2}{3^n}\right) - h\left(\frac{k-1}{3^n}\right)\right| \geq 2^{-n}$$

para todo $n \geq N$. Luego, para $n \geq N$:

$$\left|\frac{h(x_n) - h(x)}{x_n - x}\right| \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty,$$

por lo que h no es diferenciable por la izquierda en x. Luego, h es no diferenciable por la izquierda en todo punto de $(0, 1]$.

(c) Sea $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Como $[0, 1]$ es compacto, f es uniformemente continua. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x, y \in [0, 1] \text{ tales que } |x - y| \leq \delta.$$

Sea k el menor natural tal que $k\delta \geq 1$. Definimos la partición $\{t_0, \ldots, t_k\}$ de $[0, 1]$ por $t_i = i\delta_n$ para $0 \leq i < k$ y $t_k = 1$. Notemos que $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ para todo $i = 0, \ldots, k-1$ por lo que, para todo $i = 0, \ldots, k-1$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x, y \in [t_i, t_{i+1}],$$

Definimos la función lineal a trozos g como $g(t_i) \doteq f(t_i)$ para todo $i = 0, \ldots, k$ y una recta en $[t_i, t_{i+1}]$. Así, dado $x \in [0, 1]$ tomamos i tal que $t_i \leq x \leq t_{i+1}$ y

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(t_i)| + |f(t_i) - g(t_i)| + |g(t_i) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ya que $|x - t_i| \leq \delta$. Como esto se cumple para todo x, obtenemos que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$, que es lo que queríamos probar.

(d) Sea (f_k) una sucesión en C_n tal que $f_k \to f$ uniformemente. Tenemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\exists t_k \in [0, 1 - {}^1\!/\!_n] \text{ tal que } \forall h \in (0, 1 - t_k), |f_k(t_k + h) - f_k(t_k)| \leq nh.$$

Como la sucesión de reales (t_k) es acotada, tiene una subsucesión (t_{k_j}) convergente a $t \in [0, 1 - {}^1\!/\!_n]$. Además, podemos suponer que $t_{k_j} \leq t$ (tomando, por ejemplo, $t = \limsup t_k$). Se tendrá entonces que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 1-t) \implies h \in (0, 1 - t_{k_j})$. Luego, para todo $h \in (0, 1-t)$:

$$\begin{aligned}|f(t+h) - f(t)| &\leq |f(t+h) - f(t_{k_j} + h)| + |f(t_{k_j} + h) - f_{k_j}(t_{k_j} + h)| \\ &\quad + |f_{k_j}(t_{k_j} + h) - f_{k_j}(t_{k_j})| + |f_{k_j}(t_{k_j}) - f(t_{k_j})| + |f(t_{k_j}) - f(t)| \\ &\leq |f(t+h) - f(t_{k_j} + h)| + \|f - f_{k_j}\|_\infty + nh + \|f_{k_j} - f\|_\infty + |f(t_{k_j}) - f(t)|.\end{aligned}$$

Tomando límite al lado derecho, por continuidad de f y como $f_{k_j} \to f$ se obtiene que $|f(t+h) - f(t)| \leq nh$ para todo $h \in (0, 1-t)$, es decir, $f \in C_n$.
Sea ahora (f_k) una sucesión en D_n tal que $f_k \to f$ uniformemente. Tenemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\exists t_k \in [{}^1\!/\!_n, 1] \text{ tal que } \forall h \in (0, t_k), |f_k(t_k - h) - f_k(t_k)| \leq nh$$

Como la sucesión de reales (t_k) es acotada, tiene una subsucesión (t_{k_j}) convergente a $t \in [{}^1\!/\!_n, 1]$. Además, podemos suponer que $t \leq t_{k_j}$ (tomando, por ejemplo, $t = \liminf t_k$). Se tendrá entonces que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $h \in (0, t) \implies h \in (0, t_{k_j})$. Luego, para todo $h \in (0, t)$:

$$\begin{aligned}|f(t-h) - f(t)| &\leq |f(t-h) - f(t_{k_j} - h)| + |f(t_{k_j} - h) - f_{k_j}(t_{k_j} - h)| \\ &\quad + |f_{k_j}(t_{k_j} - h) - f_{k_j}(t_{k_j})| + |f_{k_j}(t_{k_j}) - f(t_{k_j})| + |f(t_{k_j}) - f(t)| \\ &\leq |f(t-h) - f(t_{k_j} - h)| + \|f - f_{k_j}\|_\infty + nh + \|f_{k_j} - f\|_\infty + |f(t_{k_j}) - f(t)|.\end{aligned}$$

Tomando límite al lado derecho, por continuidad de f y como $f_{k_j} \to f$ se obtiene que $|f(t-h) - f(t)| \leq nh$ para todo $h \in (0, t)$, es decir, $f \in D_n$.
Así, el $C_n \cup D_n$ es cerrado, por lo que G_n es abierto. Sea $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Tomemos $g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ lineal a trozos tal que $\|f - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$, que existe por la parte **(c)**. Sea h el punto fijo de ψ de la parte **(a)**, que es continua nunca diferenciable. Notemos que $\|h\|_\infty = 1$, ya que $\psi^{(n)}(I) \to h$ y $\|\psi^{(n)}(I)\| = 1$, donde I es la identidad. Definamos $\tilde{g} = g + \frac{\varepsilon}{2} h$. Luego,

$$\|f - \tilde{g}\|_\infty \leq \left\| f - g - \frac{\varepsilon}{2} h \right\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \|h\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Veamos que $\tilde{g} \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \setminus (C_n \cup D_n)$.
Como g es lineal a trozos, es derivable por la izquierda y por la derecha, es decir, los límites

$$g'(t^+) \doteq \lim_{\delta \to 0^+} \frac{g(t+\delta) - g(t)}{\delta} \quad \text{ y } g'(t^-) \doteq \quad \lim_{\delta \to 0^+} \frac{g(t) - g(t-\delta)}{\delta}$$

existen para todo $t \in (0,1)$ (aunque no son necesariamente iguales). Análogamente se definen los límites $g'(0^+)$ y $g'(1^-)$, que también existen. Además, las derivadas son constantes a trozos, es decir, para todo $t \in [0, 1)$ existe $\eta_t^1 > 0$ tal que $g'(t^+) = \frac{g(t+\delta) - g(t)}{\delta}$ para todo $0 < \delta \leq \eta_t^1$ y para todo $t \in (0, 1]$ existe $\eta_t^2 > 0$ tal que $g'(t^-) = \frac{g(t-\delta) - g(\delta)}{\delta}$ para todo $0 < \delta \leq \eta_t^2$.
Sea $t \in [0, 1 - {}^1\!/\!_n]$. Como h es nunca diferenciable por la derecha, existe $0 < \delta < \min\{\eta_t^1, 1 - t\}$ tal que

$$\left| \frac{h(t+\delta) - h(t)}{\delta} \right| > \frac{2}{\varepsilon}(n + |g'(t^+)|).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\tilde{g}(t+\delta)-\tilde{g}(t)}{\delta}\right| &= \left|\frac{\frac{\varepsilon}{2}(h(t+\delta)-h(t))+g(t+\delta)-g(t)}{\delta}\right| \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{h(t+\delta)-h(t)}{\delta}\right| - \left|\frac{g(t+\delta)-g(t)}{\delta}\right| \\
&> n + |g'(t^+)| - |g'(t^+)| > n,
\end{aligned}$$

por lo que $\tilde{g} \notin C_n$.
Análogamente, sea $t \in [1/n, 1]$. Como h es nunca diferenciable por la izquierda, existe $0 < \delta < \min\{\eta_t^2, t\}$ tal que

$$\left|\frac{h(t-\delta)-h(t)}{\delta}\right| > \frac{2}{\varepsilon}(n + |g'(t^-)|).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\tilde{g}(t-\delta)-\tilde{g}(t)}{\delta}\right| &= \left|\frac{\frac{\varepsilon}{2}(h(t-\delta)-h(t))+g(t-\delta)-g(t)}{\delta}\right| \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{h(t-\delta)-h(t)}{\delta}\right| - \left|\frac{g(t-\delta)-g(t)}{\delta}\right| \\
&> n + |g'(t^-)| - |g'(t^-)| > n,
\end{aligned}$$

por lo que $\tilde{g} \notin D_n$. Se concluye que $\tilde{g} \in G_n$, por lo que G_n es un conjunto abierto denso.

(e) Escribamos $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ con $G_n \subseteq X$ abierto para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x - G_n) &\iff y \in x - G_n, \quad \forall n \in N \\
&\iff y = x - g_n, \quad g_n \in G_n, \forall n \in \mathbb{N} \\
&\iff y = x - g, \quad g \in G_n, \forall n \in N \\
&\iff y = x - g, \quad g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \\
&\iff y \in x - G \\
&\iff y \in G_x
\end{aligned}$$

por lo que $G_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(x - G_n)$. Además, $x - G_n$ es abierto para todo $n \in \mathbb{N}$ (basta desplazar las bolas, ya que $x - B(a,r) = B(x-a,r)$). Veamos que $x - G_n$ es denso: dado $y \in X$, $\varepsilon > 0$, existe $z \in G_n$ tal que $\|(x-y)-z\| \leq \varepsilon$ porque G_n es denso. Luego,

$$\|(x-y)-z\| = \|(x-z)-y\| \leq \varepsilon$$

con $x - z \in x - G_n$, por lo que $x - G_n$ es denso. Por el teorema de Baire, $G_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(x - G_n)$ será un G_δ denso.
Además,

$$G \cap G_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (x - G_n),$$

es decir, $G \cap G_x$ es una intersección numerable de abiertos densos, por lo que también es un G_δ denso y, en particular es no vacío. Concluimos que existe $y \in G \cap G_x$, es decir, $y = g_1$ con $g_1 \in G$, $y = x - g_2$ con $g_2 \in G$ y así $g_1 = x - g_2 \implies x = g_1 + g_2$, con $g_1, g_2 \in G$.

(f) Por la parte anterior, basta ver que $\mathcal{W} \doteq \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid f \text{ es nunca diferenciable } \}$ contiene un G_δ denso. Por la parte **(d)**, $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \setminus (C_n \cup D_n)$ es un abierto denso, por lo que, del teorema de Baire, $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \setminus (C_n \cup D_n))$ es un G_δ denso. Veamos que $G_\delta \subseteq \mathcal{W}$: Si $f \in G$, para todo $t \in [0,1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $h \in (0, 1-t)$ tal que

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| > n$$

lo que implica que

$$\limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| = \infty,$$

por lo que f no es derivable por la derecha en t. Análogamente, para todo $t \in (0,1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $h \in (0,t)$ tal que

$$\left|\frac{f(t-h)-f(t)}{h}\right| > n$$

lo que implica que

$$\limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(t-h)-f(t)}{h}\right| = \infty,$$

por lo que f no es derivable por la izquierda en t. Luego, f no es derivable en todo $[0,1]$, por lo que $G \subseteq \mathcal{W}$ y se concluye el resultado.