Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
5 de julio de 2012

Control 3: Elementos de Análisis Funcional

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. Sean X, Y dos espacios de Banach y $T\colon X \to Y$ un operador lineal acotado. Recuerde que el adjunto de T, denotado T^*, es la única función $T^*\colon Y^* \to X^*$ que verifica $\langle y^*, Tx\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle$ para todo $y^* \in Y^*$ y para todo $x \in X$. Recuerde además que T^* es un operador lineal acotado.

(a) Pruebe que $T^{**}\colon X^{**} \to Y^{**}$ extiende a T, es decir, que $T^{**}J_X x = J_Y Tx$ para todo $x \in X$.

(b) Muestre que T^* es inyectivo si y sólo si $\overline{T(X)} = Y$.

(c) Para las partes siguientes, suponga que T es invertible y que $\overline{T(X)} = Y$. Pruebe que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(d) Suponga que $\overline{T^*(Y^*)} = X^*$. Muestre que T^{-1} es continuo si y sólo si $(T^*)^{-1}$ es continuo.

Solución:

(a) Dado $y^* \in Y^*$, tenemos que

$$\langle J_Y Tx, y^*\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle = \langle J_X x, T^*y^*\rangle = \langle T^{**}J_X x, y^*\rangle,$$

por lo que $J_Y Tx = T^{**}J_X x$.

(b) Como $T(X)$ es un sub-espacio, es denso si y sólo si la única función en Y^* que se anula en $T(X)$ es la función nula (corolario de Hahn-Banach). Esto es equivalente a que si $\langle T^*y^*, x\rangle = 0$ para todo $x \in X$, entonces $y^* = 0$, lo que es equivalente a que $\mathbb{K}\mathrm{er}\, T^* = \{0\}$.

(c) Se tiene que

$$\langle (T^{-1})^*T^*y^*, Tx\rangle = \langle T^*y^*, T^{-1}Tx\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle,$$

por lo que $T^{-1}T^*y^* = y^*$ (ya que $T(X)$ es denso en Y) y

$$\langle T^*(T^{-1})^*x^*, x\rangle = \langle (T^{-1})^*x^*, Tx\rangle = \langle x^*, T^{-1}Tx\rangle = \langle x^*, x\rangle,$$

por lo que $T^*(T^{-1})^*x^* = x^*$. Así, $(T^{-1})^*$ es la inversa de T^* y, como T^* es invertible (en su imagen), se concluye que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

(d) Si T^{-1} es continuo, entonces $(T^{-1})^*$ también lo es. Si $(T^{-1})^*$ es continuo, entonces $(T^{-1})^{**}$ también lo es. Como $\overline{T^*(Y^*)} = X^*$, por la parte anterior concluimos que

$$(T^{-1})^{**} = ((T^*)^{-1})^* = (T^{**})^{-1}.$$

Además, $(T^{**})^{-1}$ es continuo. Finalmente, como T^{**} extiende a T,

$$(T^{**})^{-1}J_Y Tx = J_X x = J_X T^{-1}Tx$$

por lo que $(T^{**})^{-1}$ extiende a T^{-1}. Luego, como $(T^{**})^{-1}$ es continuo,

$$\|T^{-1}Tx\| = \|J_X T^{-1}Tx\| = \|(T^{**})^{-1}J_Y Tx\| \leq \|(T^{**})^{-1}\|\|J_Y Tx\| = \|(T^{**})^{-1}\|\|Tx\|$$

por lo que T^{-1} es continuo.

P2. Sea X un espacio de Banach e $Y \subseteq X^*$ un sub-espacio cerrado tal que

(i) Y separa puntos de X y

(ii) B_X es compacta para la topología inducida por Y.

(a) Se define $\pi\colon X^{**} \to Y^*$ por $\pi(x^{**}) = x^{**}|_Y$. Muestre que π está bien definida (es decir, que si $x^{**} \in X^{**}$ entonces $x^{**}|_Y$ efectivamente es un elemento de Y^*) y que $\pi(B_{X^{**}}) = B_{Y^*}$.

(b) Sea $y^{**} \in Y^*$. Pruebe que existe $x \in X$ tal que $\pi(Jx) = y^{**}$.

(c) Demuestre que Y^* es isomorfo isométrico a X.

(d) Decimos que un espacio de Banach X tiene **predual** si existe un espacio de Banach Y tal que $Y^* = X$. Concluya que X tiene predual si y sólo si existe un sub-espacio Y del dual que verifica las condiciones anteriores.

Solución:

(a) Sea $x^{**} \in X^{**}$. Claramente $\pi(x^{**})\colon Y \to \mathbb{R}$ es lineal, porque es la restricción a un sub-espacio de una función lineal. Además, dado $y \in Y$:

$$\langle \pi(x^{**}), y\rangle = \langle x^{**}, y\rangle \leq \|x^{**}\|\|y\|,$$

por lo que $\pi(x^{**})$ es acotado (y $\|\pi(x^{**})\| \leq \|x^{**}\|$). Concluimos que π está bien definida.

Como $\|\pi(x^{**})\| \leq \|x^{**}\|$, obtenemos que si $x^{**} \in B_{X^{**}}$ entonces $\pi(x^{**}) \in B_{Y^*}$. Así, $\pi(B_{X^{**}}) \subseteq B_{Y^*}$.

Por otro lado, si $y^* \in B_{Y^*}$, por el teorema de prolongación de Hahn-Banach existe $x^{**} \in X^{**}$ tal que $x^{**}|_{Y^*} = y^*$, es decir, tal que $\pi(x^{**}) = y^*$. Como además la extensión preserva la norma, concluimos que $x^{**} \in B_{X^{**}}$ y se obtiene la inclusión contraria.

(b) Basta ver que $\pi(J(B_X)) = B_{Y^*}$. Ya tenemos que $\pi(B_{X^{**}}) = B_{Y^*}$ por la parte anterior. Dado $y^* \in B_{Y^*}$, sea entonces $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $\pi(x^{**}) = y^*$. Por el teorema de Goldstine, existe $x_\alpha \in B_X$ tal que $Jx_\alpha \to x^{**}$. Como esta red está en B_X, por la propiedad (ii) existe una subred (x_β) que converge a $x \in B_X$ para la topología inducida por Y. Esto significa que $\langle y, x_\beta\rangle \to \langle y, x\rangle$ para todo $y \in Y$ y, como además $\langle x^*, x_\beta\rangle \to \langle x^{**}, x^*\rangle$, concluimos que $\langle y, x\rangle = \langle x^{**}, y\rangle$ para todo $y \in Y$, es decir, que $\pi(Jx) = \pi(x^{**}) = y^*$.

(c) Veamos que $\varphi\colon X \to Y^*$ definida por $\varphi(x) = \pi(Jx)$ es un isomorfismo isométrico. En la parte anterior se probó la sobreyectividad. Si $\varphi(x) = \varphi(z)$, entonces $\langle Jx, y\rangle = \langle Jz, y\rangle$ para todo $y \in Y$, lo que muestra que $\langle y, x\rangle = \langle y, z\rangle$ para todo $y \in Y$. Por la propiedad (i), esto implica que $x = z$, por lo que φ es inyectiva.

Además, φ es lineal al ser composición de lineales. Falta ver que φ es una isometría. Tenemos, por la parte **(a)**, que $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$. Supongamos que existe x con $\|x\| = 1$ tal que $\|\varphi(x)\| < 1$. Como $\varphi(B_X) = B_{Y^*}$, existe $z \in B_X$ tal que $\varphi(z) = \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}$, por lo que, por la inyectividad de φ, $\|\varphi(x)\|z = x$, lo que es absurdo, pues $\|x\| = 1$ y $\|\|\varphi(x)\|z\| < 1$.

(d) Ya probamos la implicancia hacia la izquierda. Si $Y^* = X$, entonces B_X es w^*-compacta por el teorema de Banach-Alaoglu. Esto significa que B_X es compacta para la topología inducida por $J(Y) \subseteq X^{**}$. Además, $J(Y)$ separa puntos porque la topología débil-$*$ es separada.

P3. (a) Sea X un espacio vectorial y sean $f, f_1, \ldots, f_n\colon X \to \mathbb{R}$ funciones lineales. Pruebe que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{\mathbb{K}er} f_i \subseteq \operatorname{\mathbb{K}er} f \iff f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i.$$

Indicación. Para la implicancia no trivial considere la función $\Phi\colon X \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$\Phi(x) = (f(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

De esta forma el punto $a = (1, 0, \ldots, 0) \notin \operatorname{\mathbb{I}m}(\Phi)$.

Este resultado se conoce como **lema de Farkas**.

Solución: Se tiene que $a \notin \mathbb{I}\mathrm{m}(\Phi)$ porque si la segunda coordenada en adelante son 0 la primera también debe serlo (por hipótesis). Del teorema de Hahn-Banach (como $\{a\}$ es compacto y $\Phi(X)$ es cerrado), existe $y \in \mathbb{R}^{n+1}, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$y^t(1, 0, \dots, 0) < \alpha < y^t x$$

para todo $x \in \Phi(X)$. Como $\Phi(X)$ es un sub-espacio, concluimos que $y^t x = 0$ para todo $x \in \Phi(X)$. Esto muestra que

$$y_1 f(x) + \sum_{i=2}^{n+1} y_i f_{i-1}(x) = 0$$

para todo $x \in X$. Despejando se concluye el resultado.

(b) Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Mostraremos que $(X, \sigma(X, X^*))$ no es metrizable. Para ello, suponga por contradicción que existe una métrica $d(x, y)$ en X que induce la topología $\sigma(X, X^*)$.

i) Para todo entero $n \geq 1$, sea V_n una vecindad del 0 en la topología $\sigma(X, X^*)$ tal que

$$V_n \subseteq \left\{ x \in X \;\mid\; d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Usando la parte anterior pruebe que existe un conjunto numerable $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X^* tal que toda función $x^* \in X^*$ es combinación lineal finita de elementos de $\{x_n^*\}$. Para ello pruebe que el conjunto $V \doteq \{x \in X \;\mid\; |\langle x^*, x\rangle| < 1\}$ es una vecindad débil de 0 y úselo para mostrar que existe un conjunto $A \subseteq X^*$ finito tal que $\bigcap_{y^*\in A} \mathbb{K}\mathrm{er}\, y^* \subseteq \mathbb{K}\mathrm{er}\, x^*$.

ii) Pruebe que X^* tiene dimensión finita. Para ello pruebe que X^* no puede tener dimensión infinita numerable.

iii) Concluya.

Solución:

i) Si $(X, \sigma(X, X^*)$ es metrizable, sea d distancia que induce la topología débil. Luego, las bolas $\{B(0, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ son una base de vecindades del 0, así que para cada bola $B(0, \frac{1}{n})$ existe $V_n \subseteq B(0, \frac{1}{n})$ de la forma

$$V_n = \{x \in X \;\mid\; |\langle x^*, x\rangle| \leq \varepsilon_n, f \in F_n\}$$

Donde $\varepsilon_n > 0$ y $F_n \subseteq X^*$ es finito. Sea $y^* \in X^*$, notemos que $V = \{x \in X \mid |\langle y^*, x\rangle < 1\}$ es una vecindad del 0, luego debe existir $V_n \subseteq V$. Sea $x \in \bigcap_{x^*\in F_n} \mathbb{K}\mathrm{er}\, x^*$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $tx \in \bigcap_{x^*\in F_n} \mathbb{K}\mathrm{er}\, x^*$ y por lo tanto $tx \in V_n \subseteq V$. Así $|\langle y^*, x\rangle| < \frac{1}{t}$ y tomando $t \to \infty$ concluimos que $x \in \mathbb{K}\mathrm{er}\, y^*$. Luego por el lema de Farkas tenemos que y^* es combinación lineal de elementos de F_n y tomando $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que $X^* = \langle F\rangle$.

ii) Escribamos $F = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y sean que $X_n = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$, notemos además que $X^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Como $(X^*, \|\cdot\|)$ es Banach y por lo tanto completo como espacio métrico, por el lema de Baire existe $p \in \mathbb{N}$ tal que X_p tiene interior no vacío y por lo tanto $X_p = X^*$ y $\dim X^* \leq p \in \mathbb{N}$.

iii) Como X^* tiene dimensión finita entonces $X^{**} \cong X^*$, luego como $J(X) \subseteq X^{**}$ se concluye que X tiene dimensión finita contradiciendo el enunciado.