Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
20 de julio de 2012

Examen Recuperativo

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. Sea X un espacio de Banach. Pruebe que cada una de estas afirmaciones implica la siguiente (no demuestre (v) $\implies$ (i)).

(i) X es reflexivo.

(ii) Si A, B son convexos cerrados disjuntos, con uno de ellos acotado, entonces existe $x^* \in X^*, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle x^*, a \rangle \leq c_1 < c_2 \leq \langle x^*, b \rangle \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

(iii) Si K es convexo cerrado, entonces todo $x \in X \setminus K$ tiene proyección en K.

(iv) Si Y es un sub-espacio propio cerrado de X, entonces existe $x \in B_X$ con $d(x, Y) = 1$.

(v) Si $x^* \in X^*$, con $x^* \neq 0$ entonces existe $x \in B_X$ tal que $\langle x^*, x \rangle = 1$.

Indicación. Para (ii) $\implies$ (iii) justifique que, sin pérdida de generalidad, puede considerar $x = 0$. Razone por contradicción, tomando $r = \text{ínf}_{y \in K} \|y\|$ y usando (ii) para $A = B(0, r)$ y $B = K$.