Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
2 de junio de 2012

Control 2: Espacios Topológicos

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. [**1.0 pts.**] Sea X un espacio topológico separado y compacto.

(a) [*0.5 pts.*] Sea $f : X \to X$ una función continua. Muestre que existe $A \subseteq X$ no vacío tal que $f(A) = A$.
Indicación. Demuestre que existe un conjunto minimal cerrado $F \subseteq X$ tal que $f(F) \subseteq F$.

(b) [*0.5 pts.*] Sea $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos compactos en X que verifican $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \subseteq O$ donde O es un conjunto abierto. Muestre que existen finitos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $\bigcap_{i=1}^n K_{\lambda_i} \subseteq O$.

Solución:

(a) Sea $\mathcal{F} \doteq \{A \subseteq X \mid A \text{ es cerrado, no vacío y } f(A) \subseteq A\}$. Como X es cerrado y $f(X) \subseteq X$, se tiene que $\mathcal{F}$ es no vacío.
Consideremos en $\mathcal{F}$ el orden $A \preceq A' \iff A \supseteq A'$. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una cadena, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n C_i = C_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ (el mayor de los C_i según el orden), por lo que esta intersección es no vacía. Esto muestra que $\mathcal{C}$ verifica la PIF y, como X es compacto, que $\tilde{C} = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es cerrado y no vacío. Claramente $C \preceq \tilde{C}$ para todo $C \in \mathcal{C}$.
Veamos que $\tilde{C} \in \mathcal{F}$. Se tiene que

$$f(\tilde{C}) = f\left(\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C\right) \subseteq f(C') \subseteq C'$$

para todo $C' \in \mathcal{C}$, por lo que, tomando intersección al lado derecho, se concluye que $\tilde{C} \in \mathcal{F}$. Se verifican entonces las hipótesis del lema de Zorn y se concluye que existe $F \in \mathcal{F}$ maximal para este orden, es decir, un conjunto cerrado no vacío minimal para la inclusión que satisface $f(F) \subseteq F$. Finalmente, como F es cerrado y X es compacto, se tiene que F es compacto y, como f es continua, que $\tilde{F} \doteq f(F)$ es compacto y cerrado porque X es separado. Como $f(\tilde{F}) = f(f(F)) \subseteq f(F) = \tilde{F} \subseteq F$ y $\tilde{F}$ es no vacío, por la minimalidad de F se deduce que $F = \tilde{F} = f(F)$.

(b) Tomando complemento se obtiene que

$$O^c \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda^c.$$

Como X es separado y K_λ es compacto, se tiene que K_λ es cerrado para todo $\lambda \in \Lambda$. Además, O^c es un cerrado en un compacto, por lo que es compacto. Esto muestra que $\{K_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un recubrimiento abierto de O^c, que es compacto, por lo que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $O^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_{\lambda_i}^c$. Tomando complemento nuevamente se deduce que $\bigcap_{i=1}^n K_{\lambda_i} \subseteq O$.

P2. [**1.0 pts.**] Para $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se define $N_{a,b} \doteq \{a + nb \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(a) [*0.3 pts.*] Muestre la topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{Z}$ generada por la familia $\beta \doteq \{N_{a,b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ tiene por base a β.

(b) [*0.4 pts.*] Muestre que todo abierto O no vacío es infinito y que los conjuntos $N_{a,b}$ son también conjuntos cerrados.

(c) [*0.3 pts.*] Suponga que el conjunto $\mathbb{P}$ de los números primos es finito. Demuestre que

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}$$

y use este hecho para obtener una contradicción.

Solución:

(a) Se tiene que $N_{0,1} = \{0 + 1 \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$, por lo que la familia recubre $\mathbb{Z}$.

Sean $(a,b),(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que existe $x \in N_{a,b} \cap N_{a',b'}$. Debemos ver que existe un par ordenado $(a'',b'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x \in N_{a'',b''} \subseteq N_{a,b} \cap N_{a',b'}$.

Como $x \in N_{a,b}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = a + nb$ y, como $x \in N_{a',b'}$, existe $n' \in \mathbb{Z}$ tal que $x = a' + n'b'$. Definamos $a'' = x$ y $b'' = bb'$. Dado $n'' \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$a'' + n''b'' = a + nb + n''bb' = a + (n + n''b')b \in N_{a,b}$$

y

$$a'' + n''b'' = a' + n'b' + n''bb' = a' + (n' + n''b)b' \in N_{a',b'},$$

por lo que $N_{a'',b''} \subseteq N_{a,b} \cap N_{a',b'}$. Como además $x \in N_{a'',b''}$ (tomando $n'' = 0$), se obtiene lo pedido.

(b) Sea O abierto no vacío en $\mathcal{T}$. Dado $x \in O$, existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x \in N_{a,b} \subseteq O$ (porque β es base de $\mathcal{T}$). Como $N_{a,b}$ es infinito (porque $b \neq 0$) O también lo es.

Por otro lado,

$$N_{a,b} = (N_{a+1,b} \cup N_{a+2,b} \cup \cdots \cup N_{a+b-1,b})^c,$$

por lo que $N_{a,b}$ es cerrado en $\mathcal{T}$.

(c) Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}$, consideramos dos casos:

- Si k es primo, $k \in N_{0,p}$ para $p = k$, por lo que $k \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$.
- Si k no es primo, $k = pn$ con k primo y $n \notin \{-1,1\}$. Luego, $k \in N_{0,p}$, por lo que $k \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$.

Así, $\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\} \subseteq \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$.

Si $k \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$, se tiene que $k = 0 + pn = pn$ para algún p primo y $n \in \mathbb{Z}$ y, como $p \neq \{-1,1\}$, se deduce que $k \notin \{-1,1\}$. Esto muestra que $\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$.

Si $\mathbb{P}$ fuera finito, como $N_{0,p}$ es cerrado para todo $p \in \mathbb{P}$ por la parte anterior se tendría que $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ es una unión finita de cerrados, por lo que es cerrado. Luego, tendríamos que $\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}$ es cerrado, lo que implicaría que $\{-1,1\}$ es abierto, que contradice el hecho que todos los abiertos no vacíos de $\mathcal{T}$ son infinitos.

P3. [**2.0 pts.**] Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de X se dice **localmente finita** si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ que sólo intersecta un número finito de conjuntos de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

(a) [*1.0 pts.*] Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ localmente finita. Pruebe que la familia $\{\overline{A_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es localmente finita y que para todo $I \subseteq \Lambda$ el conjunto $\bigcup_{\lambda \in I} \overline{A_\lambda}$ es cerrado.

(b) [*1.0 pts.*] Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un recubrimiento cerrado y localmente finito de X. Pruebe que $B \subseteq X$ es cerrado si y sólo si para todo $\lambda \in \Lambda$ el conjunto $B \cap A_\lambda$ es cerrado en la topología inducida (traza) de A_λ.

Solución:

(a) Sea $x \in X$ y $V \in \mathcal{V}(x)$ que intersecta sólo finitos elementos de $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Sea $x \in O \subseteq V$ abierto. Se tendrá que O también intersecta a finitos elementos de $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, ya que si $A_\lambda \cap V = \varnothing$, entonces $A_\lambda \cap O = \varnothing$. Esto muestra que existe $J \subseteq \Lambda$ finito tal que $A_\lambda \subseteq O^c$ para todo $\lambda \in \Lambda \setminus J$ y, como O^c es cerrado, que $\overline{A_\lambda} \subseteq O^c$ para todo $\lambda \in \Lambda \setminus J$. Se concluye que $\overline{A_\lambda} \cap O = \varnothing$ para todo $\lambda \in \Lambda \setminus J$, lo que muestra que $\{\overline{A_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es localmente finita.

Sea ahora $I \subseteq \Lambda$. Se tiene que la familia $\{\overline{A_\lambda}\}_{\lambda \in I}$ también es localmente finita. Si $x \in \overline{\bigcup_{\lambda \in I} \overline{A_\lambda}}$, se tiene que toda vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ verifica $\bigcup_{\lambda \in I} \overline{A_\lambda} \cap V \neq \varnothing$. Sea $U \in \mathcal{V}(x)$ y $J \subseteq I$ finito tal que $\overline{A_\lambda} \cap U = \varnothing$ para todo $\lambda \notin J$. Dada cualquier $V \in \mathcal{V}(x)$, se tendrá que

$$V \cap \bigcup_{\lambda\in J} \overline{A_\lambda} \supseteq (V\cap U) \cap \bigcup_{\lambda\in J} \overline{A_\lambda} = (V\cap U)\cap \bigcup_{\lambda\in I} \overline{A_\lambda} \neq \varnothing,$$

donde la última igualdad se justifica porque $(U\cap V)\cap\bigcup_{\lambda\in I\setminus J}\overline{A_\lambda} \subseteq U\cap\bigcup_{\lambda\in I\setminus J} = \varnothing$. Lo anterior muestra que $x \in \overline{\bigcup_{\lambda\in J}\overline{A_\lambda}} = \bigcup_{\lambda\in J}\overline{A_\lambda}$ porque $\bigcup_{\lambda\in J}\overline{A_\lambda}$ es cerrado al ser una unión finita de cerrados. Se concluye entonces que $x\in\bigcup_{\lambda\in I}\overline{A_\lambda}$, por lo que $\bigcup_{\lambda\in I}\overline{A_\lambda}$ es cerrado.

(b) Veamos ambas implicancias:

$\Longrightarrow$) Directo del hecho que los cerrados en la topología inducida de A_λ intersecciones de cerrados de X con A_λ.

$\Longleftarrow$) $A_\lambda\cap B$ es cerrado en la topología traza si y sólo si existe F_λ cerrado en X tal que $A_\lambda\cap B = A_\lambda\cap F_\lambda$. Como A_λ es cerrado en X, se concluye que $A_\lambda\cap B$ es cerrado en X al ser intersección de dos cerrados. Por otro lado, la familia $\{A_\lambda\cap B\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia localmente finita de conjuntos cerrados, por lo que, por la parte **(a)**, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap B) = B\cap\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda = B\cap X = B$ es cerrado en X.

P4. [**2.0 pts.**] Un espacio topológico X se dice **espacio de Tychonoff** si verifica que $\{x\}$ es cerrado para todo $x\in X$ y para cada $V\in\mathcal{V}(x)$ existe $f\in\mathcal{C}(X)$ que verifica $f(x)=1$ y $f(V^c)=\{0\}$, donde $\mathcal{C}(X)$ denota al conjunto de las funciones continuas de X a $[0,1]$.

(a) [*0.7 pts.*] Pruebe que si $|A|=|B|$, entonces $[0,1]^A$ es homeomorfo a $[0,1]^B$, donde ambos conjuntos están dotados de la topología producto.

(b) [*0.4 pts.*] En adelante X es un espacio de Tychonoff. Sea $e\colon X\to[0,1]^{\mathcal{C}(X)}$ tal que $e(x)(f)=f(x)$, donde $x\in X$ y $f\in\mathcal{C}(X)$. Muestre que $e\colon X\to e(X)$ es un homeomorfismo.

(c) [*0.2 pts.*] Llamamos **compactificación de Stone-Čech** al conjunto $\beta X \doteq \overline{e(X)}\subseteq[0,1]^{\mathcal{C}(X)}$ dotado de la topología producto. Pruebe que βX es compacto y que X es compacto si y sólo si $e(X)$ es cerrado en $[0,1]^{\mathcal{C}(X)}$.

(d) [*0.7 pts.*] Sea Y un espacio topológico compacto y separado. Del lema de Urysohn se desprende que Y es de Tychonoff (no lo pruebe). Sea $f\colon X\to Y$ continua. Muestre que existe una única función continua $\tilde f\colon\beta X\to Y$ tal que $f=\tilde f\circ e$.

Indicación. Defina las funciones $f^*\colon\mathcal{C}(Y)\to\mathcal{C}(X)$ por $f^*(g)=g\circ f$ y $f^{**}\colon[0,1]^{\mathcal{C}(X)}\to[0,1]^{\mathcal{C}(Y)}$ por $f^{**}(u)=u\circ f^*$ y verifique que $f^{**}\circ e=\hat e\circ f$, donde $\hat e\colon Y\to[0,1]^{\mathcal{C}(Y)}$ está definida por $\hat e(y)(g)=g(y)$ para $y\in Y$ y $g\in\mathcal{C}(Y)$.

Solución:

(a) Sea $f\colon B\to A$ biyectiva. Definamos $\Upsilon\colon[0,1]^A\to[0,1]^B$ por $\Upsilon(u)=u\circ f$. Veamos que f es un homeomorfismo.

- Inyectividad: Si $\Upsilon(u)=\Upsilon(v)$ se tiene que $u(f(b))=v(f(b))$ para todo $b\in B$. Por la sobreyectividad de b, esto implica que $u(a)=v(a)$ para todo $a\in A$, lo que muestra que $u=v$.
- Sobreyectividad: Dado $w\in[0,1]^B$, tomamos $u=w\circ f^{-1}\in[0,1]^A$. Se tendrá entonces que $\Upsilon(u)=w\circ f^{-1}\circ f=w$.
- Continuidad: Si $u_\lambda\to u$ en $[0,1]^A$, se tiene que $u_\lambda(a)\to u(a)$ para todo $a\in A$. Luego,

$$\Upsilon(u_\lambda)(b)=(u_\lambda\circ f)(b)=u_\lambda(f(b))\to u(f(b))=(u\circ f)(b)=\Upsilon(u)(b)$$

para todo $b\in B$, ya que $f(b)\in A$. Esto muestra que $\Upsilon(u_\lambda)\to\Upsilon(u)$.
- Continuidad de la inversa: Si $w_\lambda\to w$ en $[0,1]^B$, se tiene que $w_\lambda(b)\to w(b)$ para todo $b\in B$. Luego,

$$\Upsilon^{-1}(w_\lambda)(a)=(w_\lambda\circ f^{-1})(a)=w_\lambda(f^{-1}(a))\to w(f^{-1}(a))=(w\circ f^{-1})(a)=\Upsilon^{-1}(w)(a)$$

para todo $a\in A$, ya que $f^{-1}(a)\in B$. Esto muestra que $\Upsilon^{-1}(w_\lambda)\to\Upsilon^{-1}(w)$.

Se concluye que Υ es un homeomorfismo entre $[0,1]^A$ y $[0,1]^B$.

(b)
- Inyectividad: Si $e(x) = e(y)$, se tiene que $f(x) = f(y)$ para todo $f \in \mathcal{C}(X)$. Si $x \neq y$, entonces, como $\{y\}$ es cerrado, $x \notin \overline{\{y\}}$, lo que implica que existe una vecindad V de x tal que $V \cap \{y\} = \varnothing$, es decir, tal que $y \in V^c$. Por hipótesis, existe $f \in \mathcal{C}(X)$ que verifica $f(x) = 1$ y $f(V^c) = \{0\}$. Como $y \in V^c$ se tiene que $f(y) = 0$, lo que contradice que $f(x) = f(y)$ para todo $f \in \mathcal{C}(X)$.

- Sobreyectividad: Directa de la definición de la función.
- Continuidad: Si $x_\lambda \to x$ en X, debemos ver que $e(x_\lambda) = e(x)$ en $[0,1]^{\mathcal{C}(X)}$. Esto es equivalente a que $e(x_\lambda)(f) = e(x)(f)$ para todo $f \in \mathcal{C}(X)$, es decir, que $f(x_\lambda) \to f(x)$ para todo $f \in \mathcal{C}(X)$. Como cada $f \in \mathcal{C}(X)$ es continua, se tiene lo pedido.
- Continuidad de la inversa: Si $u_\lambda \to u$ en $e(X)$, debemos ver que $e^{-1}(u_\lambda) \to e^{-1}(u)$ en X. Se tiene que $u_\lambda = e(x_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Por hipótesis, $u_\lambda(f) \to u(f)$ para todo $f \in \mathcal{C}(X)$, es decir, $f(x_\lambda) \to f(x)$ para todo $f \in \mathcal{C}(X)$. Si V es una vecindad de x, entonces existe $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(V^c) = \{0\}$. Como $f(x_\lambda) \to f(x) = 1$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in (0,1]$ para todo $\lambda \succeq \lambda_0$, es decir, existe λ_0 tal que $f(x_\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Esto muestra que $x_\lambda \notin V^c$ para todo $\lambda \succeq \lambda_0$, por lo que se deduce que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Como esto es cierto para una vecindad arbitraria de x, se deduce finalmente que $x_\lambda \to x$.

Se concluye que X y $e(X)$ son homeomorfos.

(c) Por el teorema de Tychonoff, $[0,1]^{\mathcal{C}(X)}$ es compacto (ya que $[0,1]$ es compacto). Como $\overline{e(X)}$ es un conjunto cerrado en un espacio compacto, es compacto.

Por otro lado, como X y $e(X)$ son homeomorfos, se tiene que X es compacto si y sólo si $e(X)$ es compacto. Además, como $[0,1]^{\mathcal{C}(X)}$ es compacto, $e(X)$ es compacto si y sólo si es cerrado en $[0,1]^{\mathcal{C}(X)}$, lo que concluye la demostración.

(d) Se cumple que, para $h \in \mathcal{C}(X)$:

$$f^{**}(u)(h) = (u \circ f^*)(h) = u(f^*(h)) = u(h \circ f).$$

Luego, para $x \in X$:

$$(f^{**} \circ e)(x)(h) = f^{**}(e(x))(h) = e(x)(h \circ f) = (h \circ f)(x) = h(f(x)).$$

Por otro lado,

$$(\hat{e} \circ f)(x)(h) = \hat{e}(f(x))(h) = h(f(x)).$$

Se concluye que $(f^{**} \circ e)(x)(h) = (\hat{e} \circ f)(x)(h)$ para todo $x \in X$ y para todo $h \in \mathcal{C}(X)$, por lo que $f^{**} \circ e = \hat{e} \circ f$.

Veamos que f^{**} es continua. Sea $u_\lambda \to u$ en βX. Luego, se tiene que $u_\lambda(h) \to u(h)$ para todo $h \in \mathcal{C}(X)$. Esto implica que, para todo $g \in \mathcal{C}(Y)$:

$$f^{**}(u_\lambda)(g) = u_\lambda(g \circ f) \to u(g \circ f) = f^{**}(u)(g),$$

por lo que $f^{**}(u_\lambda) \to f^{**}(u)$ y se tiene que f^{**} es continua.

Se sabe, por la parte **(b)**, que $\hat{e}\colon Y \to \hat{e}(Y)$ es biyectiva y, por la parte **(c)**, que $\hat{e}(Y)$ es cerrado en $[0,1]^{\mathcal{C}(Y)}$, porque Y es compacto.

Definamos $\tilde{f}\colon \beta X \to Y$ por $\hat{e}^{-1} \circ f^{**}$. Debemos verificar que esta función está bien definida, es decir, que $f^{**}(\beta X) \subseteq \hat{e}(Y)$.

Tenemos que $(f^{**} \circ e)(x)(h) = (\hat{e} \circ f)(x)(h)$ para todo $x \in X$ y para todo $h \in \mathcal{C}(Y)$, de lo que se deduce que $f^{**}(e(X)) \subseteq \hat{e}(Y)$. Como f^{**} es continua, se verifica que

$$f^{**}(\beta X) = f^{**}(\overline{e(X)}) \subseteq \overline{f^{**}(e(X))} \subseteq \overline{\hat{e}(Y)} = \hat{e}(Y),$$

por lo que $\tilde{f}$ está bien definida. Como f^{**} es continua y $\hat{e}^{-1}$ también, se concluye que $\tilde{f}$ es continua. Finalmente, la unicidad se tiene porque si $\bar{f}\colon \beta X \to Y$ es continua y verifica $\bar{f} \circ e = \hat{e} \circ f$ se debe tener que $\bar{f}(e(x))(g) = g(f(x)) = \tilde{f}(e(x))(g)$ para todo $x \in X$ y $g \in \mathcal{C}(Y)$, es decir, $\bar{f}$ coincide con $\tilde{f}$ en $e(X)$. Como $\bar{f}$ es continua, si $u \in \beta X$ y $u_\lambda \to u$ es una red en $e(X)$, se debe tener que

$$\bar{f}(u) = \text{lím}\, \bar{f}(u_\lambda) = \text{lím}\, \tilde{f}(u_\lambda) = \tilde{f}(u),$$

lo que muestra que $\bar{f} = \tilde{f}$.