Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801 - Análisis
17 de marzo de 2012

Guía 0: Lema de Zorn y aplicaciones

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Matías Pavez, David Salas.

P1. Sea X un espacio vectorial de dimensión infinita, pruebe que todo conjunto linealmente independiente puede ser extendido a una base.

P2. Sea $(A, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Un conjunto $B \subseteq A$ se dice **cofinal** si para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $a \leq b$. Pruebe que A contiene un conjunto cofinal bien ordenado.

Indicación. Considere el siguiente orden:

$$R \preceq S \iff R \subseteq S \text{ y } \forall r \in R, \forall s \in S \setminus R,\ r \leq s$$

P3. Un **filtro** sobre un conjunto no vacío S es una colección $\mathcal{F} \subseteq P(S)$ que verifica

- $S \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$
- Si $A, B \subseteq S, A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Una familia de conjuntos $\mathcal{G} \subseteq P(S)$ tiene la **propiedad de intersección finita (PIF)** si toda colección finita $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \subseteq \mathcal{G}$ tiene intersección no vacía, es decir,

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i \neq \emptyset \quad \forall \{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \subseteq \mathcal{G}.$$

(a) Pruebe que todo filtro $\mathcal{F}$ tiene PIF.

(b) Pruebe que si $\mathcal{G} \subseteq P(S)$ tiene la PIF, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre S tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Para esto demuestre que la colección $\mathcal{S}$ de todos los conjuntos $X \subseteq S$ tal que existe un conjunto finito $\{X_1, \ldots, X_n\} \subseteq \mathcal{G}$, con $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n \subseteq X$ es un filtro.

(c) Un filtro $\mathcal{U}$ sobre S se dirá **ultrafiltro** si

$$\forall X \subseteq S \text{ se verifica que } X \in \mathcal{U} \text{ o } X^c \in \mathcal{U}.$$

Pruebe que un filtro $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si y sólo si $\mathcal{F}$ es maximal.

Indicación. Proceda por contradicción y construya $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ que tenga la PIF.

(d) Pruebe que todo filtro puede ser extendido a un ultrafiltro. Este resultado se conoce como **lema del ultrafiltro**.

P4. Una función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **aditiva** si

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Demuestre que una función aditiva es continua si y sólo si es lineal (es decir, es de la forma λx para algún $\lambda \in \mathbb{R}$).

(b) Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}$ con escalares en el cuerpo $\mathbb{Q}$. Se sabe que existe una base de Hamel $B \subseteq \mathbb{R}$ de este espacio. Justifique que $|B| = |\mathbb{R}|$.

(c) Sea $f \colon B \to \mathbb{R}$. Demuestre que existe una única extensión aditiva $\tilde{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (es decir, una función aditiva tal que $\tilde{f}(b) = f(b) \quad \forall b \in B$).

(d) Concluya que existen $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ funciones aditivas no continuas y $|\mathbb{R}|$ funciones aditivas continuas.

P5. Sea A un conjunto infinito. El objetivo de este problema es probar que $|A| = |A^2|$.

(a) El axioma de elección justifica la existencia de $N \subseteq A$ infinito numerable (no lo pruebe). Se sabe que existe una biyección $f\colon N \to N^2$. Considere el conjunto

$$\mathcal{F} = \{(M, g) \mid N \subseteq M \subseteq A \wedge g\colon M \to M^2 \text{ es una biyección}\}$$

con el orden

$$(M, g) \preceq (K, h) \iff M \subseteq K \wedge g(m) = h(m) \quad \forall m \in M.$$

Demuestre que $\mathcal{F}$ verifica las hipótesis del lema de Zorn y sea (B, g) el elemento maximal.

(b) Sea $C = A \setminus B$. Pruebe que si $|C| \leq |B|$, entonces $|A| = |A^2|$.
Indicación: Note que $A^2 = C^2 \mathbin{\dot\cup} B \times C \mathbin{\dot\cup} C \times B \mathbin{\dot\cup} B^2$.

(c) Si $|B| \leq |C|$, entonces existe $D \subseteq C$ con $|D| = |B|$. Pruebe que $|(B \cup D)^2 \setminus B^2| = |D|$ y construya una biyección entre $(B \cup D)$ y $(B \cup D)^2$ que extiende a g. Concluya.