Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
14 de marzo de 2014

Auxiliar 1 MA3801

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliar: Rodolfo Gutiérrez, Camila Romero, Felipe Subiabre.

P1. **(a)** Decimos que una relación $\leq$ en un conjunto X es un **preorden** si es refleja y transitiva. Muestre que si $\leq$ es un preorden en X entonces la relación $x \sim y$ dada por $x \leq y \wedge y \leq x$ es una relación de equivalencia.

(b) Considere la relación $\leq$ en $X/\sim$ definida por $[x] \leq [y]$ si y sólo si $x \leq y$. Muestre que $\leq$ está bien definida y que es una relación de orden en $X/\sim$.

P2. Sea X un conjunto no vacío. Decimos que una famila de conjuntos $\mathcal{F}$ de X tiene la **propiedad de intersección finita** (en adelante, **PIF**) si cualquier subfamilia finita de ésta tiene intersección no vacía, es decir

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}.$$

(a) Pruebe que todo filtro tiene la PIF.

(b) Muestre que si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tiene la PIF, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X con $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

(c) Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Muestre que las siguientes son equivalentes:

i) para todo $A \subseteq X$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$;

ii) $\mathcal{F}$ es maximal para la inclusión en $\mathcal{P}(X)$.

Llamamos **ultrafiltro** a un filtro con estas propiedades.

(d) Pruebe que todo filtro puede ser extendido a un ultrafiltro.

P3. Sea X un conjunto. Pruebe que las siguientes son equivalentes:

i) no existe una biyección entre X y $\{1, \ldots, n\}$ para ningún $n \in \mathbb{N}$;

ii) existe una inyección $f\colon \mathbb{N} \hookrightarrow X$;

iii) existe una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que no tiene minimal para la inclusión;

iv) existe una inyección $g\colon X \hookrightarrow X \setminus \{x\}$ con $x \in X$.

Decimos que X es **infinito** si verifica estas propiedades y **finito** si no.

P4. Sea α un cardinal infinito y sea A un conjunto con $\operatorname{card} A = \alpha$.

(a) Probaremos que $\alpha + \alpha = \alpha$. Para esto, se propone el siguiente esquema:

i) Pruebe que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ con $\operatorname{card} A_i = \aleph_0$ para todo $i \in I$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$ en I. Concluya que $\alpha = \aleph_0 \cdot \operatorname{card} I$.

ii) Considere C_1 el conjunto de los naturales pares y C_2 el conjunto de los naturales impares y use el hecho que $\mathbb{N} \times I = (C_1 \times I) \cup (C_2 \times I)$ para concluir.

(b) Probaremos ahora que $\alpha \cdot \alpha = \alpha$. Para esto, se propone el siguiente esquema:

i) Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{(D, f) \mid D \subseteq A \wedge f\colon D \to D \times D \text{ es una biyección}\}$ y el orden en $\mathcal{F}$ dado por $(D, f) \leq (E, g) \iff D \subseteq E \wedge g|_D = f$. Justifique que $\mathcal{F}$ es no vacío y muestre que tiene un elemento maximal (D, f) para el orden $\leq$.

ii) Sea $G = A \setminus D$. Pruebe que si $\operatorname{card} G \leq \operatorname{card} D$ se concluye el resultado.

iii) Suponga que $\operatorname{card} D < \operatorname{card} G$ y sea $E \subseteq G$ con $\operatorname{card} E = \operatorname{card} D$. Obtenga una contradicción usando el conjunto $D \cup E$.