Introducción a la Teoría de Grafos

Conceptos Simples, Problemas Difíciles

Héctor Ramírez C.[1]

[1] Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile

Curso MA3701: Optimización

Indice

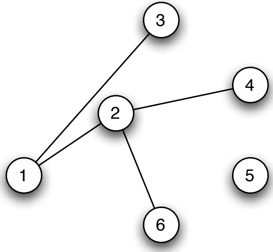
Grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ está compuesto por un conjunto finito de nodos o vértices V y un conjunto de aristas $E \subseteq V_*^2 := V \times V \setminus \cup_{v \in V}\{(v, v)\}$. En esta primera definición no importa el sentido de las aristas.

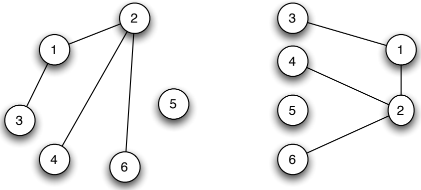
Ejemplo

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *y* $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 6)\}$



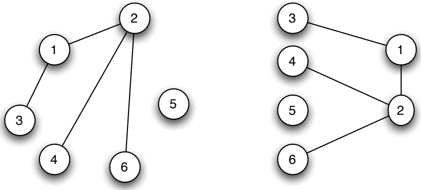
Representaciones gráficas de un grafo

Hay múltiples representaciones gráficas de un grafo.
Por ejemplo, el grafo del ejemplo puede ser representado así:

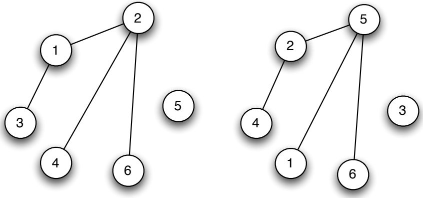


Representaciones gráficas de un grafo

Hay múltiples representaciones gráficas de un grafo.
Por ejemplo, el grafo del ejemplo puede ser representado así:



Los cuales son isomorfos a:



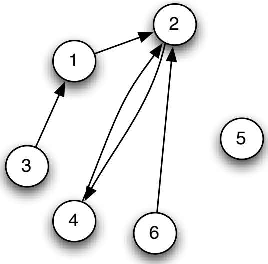
Grafos dirigidos

Definición

Un grafo dirigido (o digrafo) $G = (V, E)$ está compuesto por un conjunto finito de nodos o vértices V y un conjunto de aristas $E \subseteq V_*^2$ para las cuales si importa el sentido de las aristas.

Ejemplo

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \;\; y \;\; E = \{(1,2), (2,4), (3,1), (4,2), (6,2)\}$$



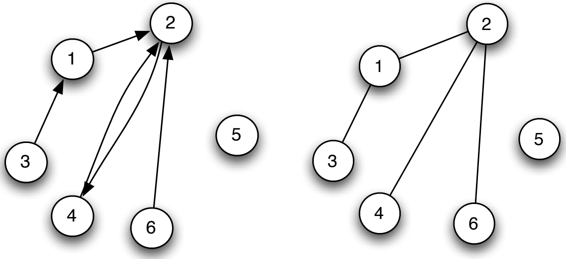
Versión no-dirigida de un grafo dirigido

Definición

La *versión no-dirigida* *de un grafo dirigido* $G = (V, E)$ *corresponde al grado (no-dirigido) descrito por los mismos conjuntos* V *y* E.

Ejemplo

La versión no-dirigida de $G = (V, E)$ *con* $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *y* $E = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 2), (6, 2)\}$ *corresponde a:*



Primeras definiciones (para grafos no-dirigidos)

- Tamaño de un grafo $G = (V, E)$: $|G| := |E|$
- u y v vértices adyacentes de $G = (V, E)$: $(u, v) \in E$
- $e \in E$ es incidente en $v \in V$: $\exists\, u \in V,\ e = (u, v) \in E$
- Grado de un vértice: $\delta(v) = |\{u : (u, v) \in E\}|$
- Grado máximo $\Delta(G)$ y grado mínimo $\delta(G)$ de un grafo.
- Subgrafo $G' = (V', E')$ de $G = (V, E)$
- Camino y Ciclo.
- Distancia $d(u, v)$, diámetro $diam(G)$.
- Grafo conexo: $\forall u, v \in V$, $u \neq v$, existe un camino de u a v.
- Matriz de incidencia.

Primeras definiciones (para grafos no-dirigidos)

- Tamaño de un grafo $G = (V, E)$: $|G| := |E|$
- u y v vértices adyacentes de $G = (V, E)$: $(u, v) \in E$
- $e \in E$ es incidente en $v \in V$: $\exists\, u \in V,\ e = (u, v) \in E$
- Grado de un vértice: $\delta(v) = |\{u : (u, v) \in E\}|$
- Grado máximo $\Delta(G)$ y grado mínimo $\delta(G)$ de un grafo.
- Subgrafo $G' = (V', E')$ de $G = (V, E)$
- Camino y Ciclo.
- Distancia $d(u, v)$, diámetro $diam(G)$.
- Grafo conexo: $\forall u, v \in V$, $u \neq v$, existe un camino de u a v.
- Matriz de incidencia.

Todas estas definiciones pueden reescribirse para grafos no-dirigidos.

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \tag{1}$$

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \tag{1}$$

Denotamos por $V' \subseteq V$ el subconjunto de los vértices de grado impar, y $V'' = V \setminus V'$ subconjunto de los vértices de grado par

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \qquad (1)$$

Denotamos por $V' \subseteq V$ el subconjunto de los vértices de grado impar, y $V'' = V \setminus V'$ subconjunto de los vértices de grado par

Obtenemos que $\sum_{v \in V'} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \in V''} \delta(v)$ ■

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v\in V} \delta(v) = 2|E| \tag{1}$$

Denotamos por $V' \subseteq V$ el subconjunto de los vértices de grado impar, y $V'' = V \setminus V'$ subconjunto de los vértices de grado par

Obtenemos que $\sum_{v\in V'} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v\in V''} \delta(v)$ ■

La igualdad (1) se puede reescribir como:

$$\sum_{v\in V} \delta(v) = 0 \mod 2,$$

conocida como *handshaking lemma* pues expresa que:

Primer resultado: *the handshaking lemma*

Teorema

El número de vértices de grado impar es par

Proof. Notemos que

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \tag{1}$$

Denotamos por $V' \subseteq V$ el subconjunto de los vértices de grado impar, y $V'' = V \setminus V'$ subconjunto de los vértices de grado par

Obtenemos que $\sum_{v \in V'} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \in V''} \delta(v)$ ■

La igualdad (1) se puede reescribir como:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 0 \mod 2,$$

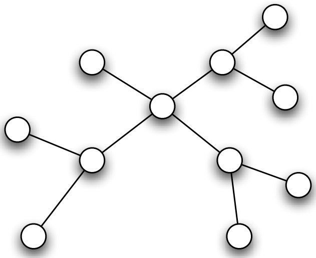
conocida como *handshaking lemma* pues expresa que:

En cualquier fiesta el número de manos estrechadas es par

Árbol

Definición

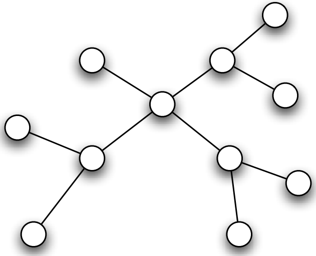
Un árbol es un grafo conexo que no contiene ciclos.



Árbol

Definición

Un árbol es un grafo conexo que no contiene ciclos.



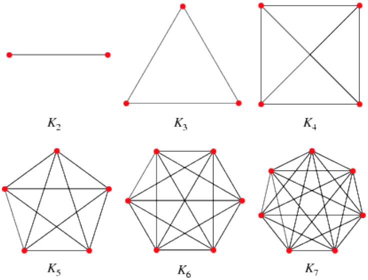
Proposición

$$G = (V, E) \text{ es un árbol} \iff G \text{ es conexo y tiene } |V| - 1 \text{ aristas}$$

Grafos completos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ *se dirá* completo *si* $E = V_*^2$.



Ejercicio

$$G \text{ es completo } \iff |E| = \frac{(|V| - 1)|V|}{2}$$

Grafos bipartitos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ *se dirá* *bipartito* *si* $V = V_1 \cup V_2$ *y* $E \subseteq V_1 \times V_2$.

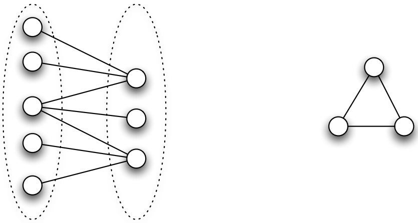


Figura: Ejemplo de un grafo bipartito y un no-bipartito

Grafos bipartitos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dirá bipartito si $V = V_1 \cup V_2$ y $E \subseteq V_1 \times V_2$.

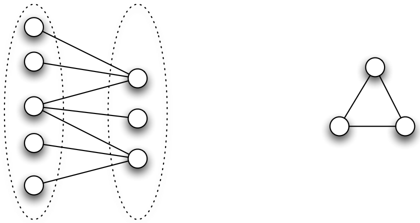


Figura: Ejemplo de un grafo bipartito y un no-bipartito

Proposición

$$G \text{ es bipartito} \iff \text{no contiene ciclos impares}$$

Grafos completos bipartitos

Definición

Diremos que un grafo $G = (V, E)$ *es* *completo bipartito* *si este es bipartito y si* $E = V_1 \times V_2$*, donde* $V = V_1 \cup V_2$*.*

Grafos completos bipartitos

Definición

Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es completo bipartito si este es bipartito y si $E = V_1 \times V_2$, donde $V = V_1 \cup V_2$.

Si $|V_1| = n_1$ y $|V_2| = n_2$, denotaremos a este grafo por K_{n_1,n_2}.
Notemos que $|K_{n_1,n_2}| = n_1 n_2$.

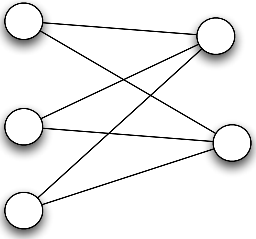


Figura: Grafo $K_{3,2}$