Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3701 Optimización
Semestre 2014-1

Control 1: Pauta

Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Nicolás Hernández

P1 Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \max & \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3 \\ \text{s.a} & 2x - 2y = 1 \\ & (x+y)^2 \leq 1 \end{array}$$

(a) (2.0 puntos) Encuentre condiciones sobre a_{11}, a_{12} y a_{22} bajo las cuales el problema es convexo y tiene una única solución. Justifique en ambos casos haciendo uso de las restricciones.

(b) (1.0 puntos) Demuestre que los gradientes de las restricciones son linealmente independientes en todo punto factible del problema.

(c) (3.0 puntos) Encuentre la solución del problema para el caso $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = -2$, usando las condiciones de optimalidad de KKT.

Sol: (a) Como se tiene un problema de maximización, escribimos el problema equivalente (salvo signo):

$$\begin{array}{ll} \min & \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 \\ \text{s.a} & 2x - 2y = 1 \\ & (x+y)^2 \leq 1 \end{array}$$

Notamos que la restricción de igualdad es lineal, y la restricción de desigualdad es una función convexa, por lo tanto si la función objetivo es convexa el problema será convexo. La función objetivo es cuadrática diferenciable y su matriz Hessiana vale $\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{bmatrix}$, que es semidefinida positiva si y sólo si los subdeterminantes son positivos. Es decir:

$$-a_{11} \geq 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$$

El problema tiene solución pues la función objetivo es continua y el conjunto factible es compacto. En efecto, el conjunto factible es claramente cerrado. Si despejamos $x = y + \frac{1}{2}$ de la restricción de igualdad y reemplazamos en la restricción de desigualdad obtenemos

$$\left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$$

Lo que acota el valor de y, estas cotas inducen cotas para x debido a la restricción lineal. Por último, el problema tiene solución única si la función objetivo es estrictamente convexa, en este caso una condición suficiente para que eso ocurra es que los subdeterminantes sean estrictamente positivos, es decir:

$$-a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

(b) Llamemos $h(x,y) = 2x - 2y - 1$, $g(x,y) = (x+y)^2 - 1$. Se tiene que

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+y) \\ 2(x+y) \end{pmatrix}$$

El primer vector sigue la dirección $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y el segundo vector sigue la dirección $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sabemos que estos vectores son linealmente independientes, por lo tanto los gradientes también.

(c) En este caso la función objetivo es $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - x - 4y - 3$. Escribimos el Lagrangeano:

$$L(x,y,\lambda,\mu) = x^2 - 2xy + 2y^2 - x - 4y - 3 + \lambda\left(x^2 + 2xy + y^2 - 1\right) + \mu\left(2x - 2y - 1\right)$$

Por lo tanto las condiciones de KKT son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x - 2y - 1 + 2\lambda x + 2\lambda y + 2\mu = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -2x + 4y - 4 + 2\lambda x + 2\lambda y - 2\mu = 0 \\
& \quad\quad\;\; \lambda(x^2 + 2xy + y^2 - 1) = 0 \\
& \quad\quad\;\; 2x - 2y - 1 = 0 \\
& \quad\quad\;\; (x+y)^2 \leq 1 \\
& \quad\quad\;\; \lambda \geq 0
\end{aligned}$$

<u>Caso 1</u>: Si $\lambda = 0$, resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned}
2x - 2y - 1 + 2\mu &= 0 \\
-2x + 4y - 4 - 2\mu &= 0 \\
2x - 2y - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$x = 3, \; y = \frac{5}{2}, \; \mu = 0$$

Este punto no es un candidato a óptimo, pues no cumple con la condición de factibilidad $(x+y)^2 \leq 1$.

<u>Caso 2</u>: Si $\lambda \neq 0$ entonces $(x+y)^2 = 1$, por lo tanto $(x+y) = 1$ o $x + y = -1$. En el primer caso resolvemos el sistema

$$\begin{aligned}
x + y - 1 &= 0 \\
2x - 2y - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{3}{4}, \; y = \frac{1}{4}$$

Para chequear factibilidad calculamos λ y μ del sistema formado por las ecuaciones $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ luego de reemplazar el valor de x e y, estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
2\lambda + 2\mu &= 0 \\
2\lambda - 2\mu &= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\lambda = \frac{9}{8}, \; \mu = \frac{-9}{8}$$

Este punto es un candidato pues cumple todas las condiciones de KKT. En el segundo caso (x+y=-1), resolvemos el sistema

$$\begin{aligned}
x + y + 1 &= 0 \\
2x - 2y - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$x = -\frac{1}{4},\ y = -\frac{3}{4}$$

Para chequear factibilidad calculamos λ y μ del sistema formado por las ecuaciones $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ luego de reemplazar el valor de x e y, estas ecuaciones son:

$$-2\lambda + 2\mu = 0$$

$$-2\lambda - 2\mu = \frac{13}{2}$$

cuya solución es

$$\lambda = -\frac{13}{8},\ \mu = -\frac{13}{8}$$

Este punto no es un candidato pues no cumple la condición de factibilidad $\lambda \geq 0$. De esta forma tenemos un único candidato a solución del problema, como el problema tiene solución necesariamente es $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}$.

P2 Usted posee dinero invertido en 3 fondos A, B, C y desea reacomodar su dinero entre los fondos sin invertir dinero adicional. Si llamamos x a la cantidad de dinero adicional que invertirá en el fondo A, y a la cantidad de dinero adicional que invertirá en el fondo B y z a la cantidad de dinero adicional que invertirá en el fondo C, se debe cumplir que

$$x + y + z = 0$$

(Note que x, y y z pueden tener signo positivo o negativo). Además, por cuestiones legales, las variaciones que hace entre los 3 fondos deben cumplir con la restricción adicional

$$-x + 2y = z^2$$

Ignorando los costos de transacción y otros, usted desea maximizar el impacto que sus cambios tendrán sobre un mercado que le involucra. Dicho impacto no depende de z y tiene la forma

$$-x + 8y$$

(a) (0.5 puntos) Plantee el problema matemático que debe resolverse y demuestre que los gradientes de las restricciones son linealmente independientes en cualquier punto factible.

(b) (1.5 puntos) Encuentre los puntos críticos del problema usando las condiciones de optimalidad de KKT.

(c) (1.0 puntos) Calcule el cono crítico en cada uno de los puntos críticos encontrados.

(d) (1.5 puntos) Usando condiciones de segundo orden, demuestre que existe un mínimo local del problema.

(e) (1.5 puntos) Demuestre que el mínimo local encontrado es mínimo global.

Sol: (a) El problema equivalente (salvo signo) al problema que deseamos resolver es

$$(P)\begin{cases} \min & x - 8y \\ \text{s.a} & x + y + z = 0 \\ & -x + 2y - z^2 = 0 \end{cases}$$

Llamando $g(x, y) = x + y + z$, $h(x, y) = -x + 2y - z^2$, se tiene que

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2z \end{pmatrix}$$

como los subvectores formados por la primera y segunda coordenada son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, se trata de 2 vectores linealmente independientes.

(b) El Lagrangeano del problema es

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x - 8y + \lambda_1(x + y + z) + \lambda_2(-x + 2y - z^2)$$

Los puntos críticos satisfacen

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \iff 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \iff -8 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \iff \lambda_1 - 2\lambda_2 z = 0$$

Resolviendo el sistema de la primera y segunda ecuación se obtiene que $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Reemplazando estos valores en la tercera ecuación se obtiene que $z = \frac{1}{3}$. Usando ahora este valor en las restricciones, los puntos críticos satisfacen:

$$x + y + \frac{1}{3} = 0$$

$$-x + 2y - \frac{1}{9} = 0$$

Este sistema tiene como solución $x = -\frac{7}{27}$, $y = -\frac{2}{27}$. Por lo tanto el único punto crítico es

$$(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \left(-\frac{7}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{1}{3}, 2, 3\right)$$

(c) Calculamos el cono crítico:

$$K(x) = \{d \in \mathbb{R}^3 : \nabla g(x) \cdot d = 0 \ , \ \nabla h(x) \cdot d = 0 \ , \ \nabla f(x) \cdot d \leq 0\}$$

En este caso:

$$K(x, y, z) = \left\{ d \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot d = 0 \ , \ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2z \end{pmatrix} \cdot d = 0 \right\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} K\left(-\frac{7}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{1}{3}\right) &= \{d \in \mathbb{R}^3 : d_1 + d_2 + d_3 = 0 \ , \ -d_1 + 2d_2 - \frac{2}{3}d_3 = 0\} \\ &= \{d \in \mathbb{R}^3 : d_1 = 8d_2 \ , \ -9d_2 = d_3\} \\ &= \{\alpha(8, 1, -9) \ , \ \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(d) Calculando las segundas derivadas obtenemos la matriz Hessiana del lagrangeano

$$H_x L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto en el punto crítico:

$$H_x L\left(-\frac{7}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{1}{3}, 2, 3\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Esta matriz no es semidefinida positiva, pero podrá serlo para los vectores del cono crítico:

$$\begin{aligned} d^t H_x L\left(-\frac{7}{27}, -\frac{2}{27}, \frac{1}{3}, 2, 3\right) d &= \alpha^2 (8, 1, -9) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \\ &= -486\alpha^2 < 0 \quad \forall \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo que no se cumple la condición necesaria de segundo orden y el punto crítico no es un mínimo local del problema.

(e) De la parte anterior, sabemos que no existen mínimos locales para el problema, por lo tanto, no pueden haber mínimos globales.

P3 Considere el problema perturbado

$$(P_t) \qquad \begin{cases} \min & (x-1)^2(y-4)^2 + t(x-5) \\ \text{s.a} & y = x+2 \\ & x \geq 2t \end{cases}$$

(a) (2.0 puntos) Estudie existencia, unicidad, condiciones de optimalidad y encuentre las soluciones del problema para el caso sin perturbación $t = 0$.

(b) (2.0 puntos) Para cada solución de (P_0) del tipo (x_0, λ_0, μ_0), demuestre que existen funciones diferenciables $x(t)$, $\lambda(t)$, $\mu(t)$ definidas en una vecindad de $t = 0$ tales que, $x(0) = x_0$, $\lambda(0) = \lambda_0$, $\mu(0) = \mu_0$; $(x(t), \lambda(t), \mu(t))$ es la única solución del sistema de condiciones de optimalidad de KKT asociadas al problema (P_t) y $x(t)$ es un mínimo local estricto de (P_t).

(c) (2.0 puntos) Para cada solución de (P_0) del tipo (x_0, λ_0, μ_0) estudie la optimalidad global de los puntos $x(t)$, donde $x(t)$ corresponde a lo establecido en la parte anterior.

Sol: (a) El problema en el caso $t = 0$ corresponde a:

$$(P_0) \qquad \begin{cases} \min & (x-1)^2(y-4)^2 \\ \text{s.a} & y = x+2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

El Lagrangeano es $L(x, y, \lambda, \mu) = (x-1)^2(y-4)^2 - \lambda x + \mu(y - x - 2)$ y las condiciones de KKT son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2(x-1)(y-4)^2 - \lambda - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2(x-1)^2(y-4) + \mu = 0 \\ & \qquad \lambda x = 0 \\ & \qquad y - x - 2 = 0 \\ & \qquad x \geq 0 \\ & \qquad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Caso 1: Si $\lambda = 0$, de las dos primeras ecuaciones, despejando μ obtenemos que

$$2(x-1)(y-4)\,(x - 1 + y - 4) = 0$$

Si $x - 1 = 0$, entonces $x = 1$ y de $y - x - 2 = 0$ sigue que $y = 3$. Si $y - 4 = 0$, entonces $y = 4$ y de $y - x - 2 = 0$ sigue que $x = 2$. Si $x - 1 + y - 4 = 0$ resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x + y - 5 &= 0 \\ -x + y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{7}{2}$. En este caso tenemos los candidatos $(1, 3)$, $(2, 4)$ y $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

Caso 2: Si $\lambda \neq 0$ entonces $x = 0$ e $y = 2$. Reemplazando en las derivadas del Lagrangeano se obtiene que $\mu = 4$ y $\lambda = -12$, este punto no cumple las condiciones de optimalidad de KKT y no es un candidato a óptimo.

Evaluando la función objetivo descartamos que $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ sea mínimo global, y nos damos cuenta que $(1, 3)$ y $(2, 4)$ son mínimos globales pues alcanzan el mínimo de la función objetivo (que es siempre positiva). Por lo tanto la solución no es única.

(b) Queremos utilizar el teorema de Fiacco-McCormick, para eso chequeamos las hipótesis.

i. Llamando $h(x, y) = y - x - 2$ y $g(x, y) = -x$, los gradientes de las restricciones son

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que son claramente l.i. en todo punto y por lo tanto en los mínimos globales.

ii. Los mínimos no tienen restricciones de desigualdad activas, por lo tanto la complementariedad estricta se cumple por vacuidad.

iii. Para chequear la CSSO calculamos el hessiano del Lagrangeano y obtenemos

$$H_xL(x,y,\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 2(y-4)^2 & 4(x-1)(y-4) \\ 4(x-1)(y-4) & 2(x-1)^2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$H_xL(1,3,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_xL(2,4,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos los conos críticos:

$$K(x,y) = \{d \in \mathbb{R}^2 : \nabla h(x,y)\cdot d = 0 \ , \ \nabla g(x,y)\cdot d \leq 0 \ (\text{ si es que } g(x,y)=0) \ , \ \nabla f(x,y)\cdot d \leq 0\}$$

En nuestro caso, como los mínimos globales no tienen restricciones activas y $\lambda = 0$:

$$K(1,3) = K(2,4) = \left\{ d \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

De esta forma obtenemos que para los vectores del cono crítico:

$$d^t H_xL(1,3,0,0)d = \alpha^2(1,1)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\alpha^2 > 0 \ , \ \forall \alpha \neq 0$$

$$d^t H_xL(2,4,0,0)d = \alpha^2(1,1)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\alpha^2 > 0 \ , \ \forall \alpha \neq 0$$

Por lo tanto ambos mínimos globales cumplen (CSSO) y aplicando el teorema de Fiacco-McCormick a cada uno de ellos se concluye lo pedido.

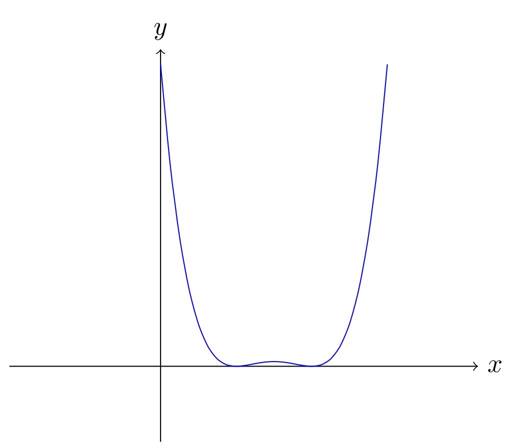
(c) Para simplificar el análisis, hacemos una reducción de variables usando que $y = x + 2$ y obtenemos el problema equivalente

$$(P_t') \qquad \begin{cases} \min & (x-1)^2(x-2)^2 + t(x-5) \\ \text{s.a} & x \geq 2t \end{cases}$$

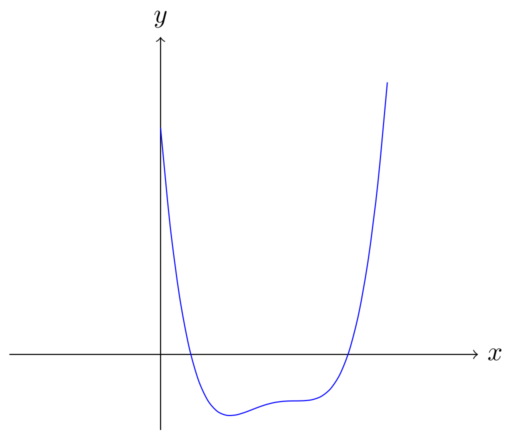
Y el problema (P_0) que se resovió en la parte (a) es equivalente a

$$(P_0') \qquad \begin{cases} \min & (x-1)^2(x-2)^2 \\ \text{s.a} & x \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo tiene la forma siguiente, con los puntos críticos en $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ y $x = 2$.



Al hacer una perturbación con la función $p(x) = t(x-5)$, con $t > 0$, ambos mínimos locales reducen su valor objetivo, siendo $x = 1$ el más afectado, por ejemplo para $t = 0.2$ se obtiene:



Por lo tanto la función $x_1(t)$ asociada a la solución $x = 1$ de (P_0) entregará mínimos globales del problema perturbado y la función $x_2(t)$ asociada a la solución $x = 2$ de (P_0) entregará mínimos locales no globales de (P_0) en la medida que $x_1(t) \geq 2t$ y el mínimo global no sea barrido fuera del conjunto factible.