

Probabilidades

AFVSF

1. General

1.1. Combinatoria

prop **Principio del Multiplicación.** Si un hecho puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si una vez realizado éste se sabe que otro hecho puede realizarse de n_2 maneras diferentes, entonces el número de maneras diferentes que puede realizarse ambos a la vez, en este orden, es $n_1 \cdot n_2$ maneras diferentes. En general

$$N_{total} = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

def **Permutaciones (Variaciones) Simples.** Son las diferentes ordenaciones que se pueden hacer en un arreglo de tamaño r con n elementos distinguibles, donde los objetos se pueden usar sólo una vez.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Obs: Usualmente se le llama permutación al caso especial $r = n$ donde:

$$P_n = n!$$

def **Permutaciones con elementos repetidos.** Si se tienen n elementos divididos en k grupos, con n_i : cant. de objetos tipo i , tq $\sum_{i=1}^k n_i = n$. El total de permutaciones posibles es:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

def **Combinaciones.** Dada una agrupación de n elementos, la cantidad de subconjuntos de k elementos de dicha agrupación está dada por:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Obs: El número total de subconjuntos no vacíos que se pueden formar es: $2^n - 1$

1.2. Axiomatica de probabilidades

def Una medida de probabilidad sobre un espacio Ω cumple.

$$(A1) \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

$$(A2) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$(A3) \quad \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ una familia disjunta de eventos, entonces } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

prop (1) σ -Subaditividad: Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de eventos. Entonces $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

(2) Aditividad: Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de eventos disjuntos. Entonces $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

(3) Monotonía: Sean A, B eventos. Si $A \subseteq B$, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(4) Subaditividad: Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de eventos, entonces $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

(5) Propiedad del Complemento: $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(6) Principio de Inclusión y Exclusión: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Generalización: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i,j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$

(7) Continuidad de la probabilidad: Si $A_n \nearrow A$ (ó $A_n \searrow A$), $\mathbb{P}(A_n) \nearrow \mathbb{P}(A)$ (ó $\mathbb{P}(A_n) \searrow \mathbb{P}(A)$).

1.3. Conjuntos

def **Probabilidad condicional** Sean A, B eventos tales que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilidad de A condicionado por B se define por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

teo **Fórmula de Bayes:** Dados A, B eventos, se tiene que:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

teo **Probabilidades Totales:** Sea Ω un espacio muestral y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ partición de Ω , entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

prop **Multiplicación de Probabilidades:** Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son eventos, entonces:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i | A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}) = \mathbb{P}(A_n) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i | A_{i+1} \cap \dots \cap A_n)$$

def **Independencia** Diremos que dos eventos A y B son independientes si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

def **Función Distribución** Para una variable aleatoria X su función de distribución F definida sobre todos los números reales b con $-\infty < b < \infty$:

$$F(b) = \mathbb{P}(X \leq b)$$

(I) F es una función no decreciente.

$$(II) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = 1.$$

$$(III) \quad \lim_{b \rightarrow -\infty} F(b) = 0.$$

$$(IV) \quad \text{Si } b_n \searrow b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} F(b_n) = F(b).$$

def **Esperanza** La esperanza es como el centro de masa de la probabilidad y se define:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

Para todos los valores que puede tomar x tq $p(x) \geq 0$.

(I) $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx$. para todos los valores que puede tomar x tq $p(x) \geq 0$.

$$(II) \quad E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta.$$

$$(III) \quad E(\alpha) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \alpha.$$

def Varianza Representa como el momento de inercia y se define como:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

equivalentemente

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$(I) DS(X) = \sqrt{Var(X)} \text{ (DS "desviación estándar")}$$

$$(II) Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X).$$

Variable Aleatoria Discreta

def Variable aleatoria discreta

Es una función medible a valores en los reales y a lo mas toma una cantidad numerable de ellos. Para X variable aleatoria definimos

$$p(a) = \mathbb{P}(X = a)$$

$$(I) \text{ para todo valor } x_i \text{ que pueda tomar } X : p(x_i) \geq 0.$$

$$(II) \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1, \text{ con } p(x_i) = 0 \text{ para todos los valores } x_i \text{ que no puede tomar } X.$$

La Función distribución puede ser expresada como:

$$F(a) = \sum_{x_i \leq a} p(x_i)$$

def V.A Bernoulli Esta variable aleatoria se caracteriza por tener dos posibilidades, cuando $X = 1$ (éxito) o $X = 0$ (fracaso). Sea p la probabilidad de éxito y $(1-p)$ la de fracaso, así:

$$p(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

$$p(1) = \mathbb{P}(X = 1) = p$$

- $E(X) = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$
- $F(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = 1 - p$
 $F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = 1$

def V.A Binomial Esta variable aleatoria busca i éxitos en n . Escribimos $X \sim Bin(n, p)$:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n$$

- $E(X) = np$
- $Var(X) = np(1 - p)$
- $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \sum_{i=0}^a \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$

def V.A poisson Es una variable aleatoria que toma los valores $X = 0, 1, 2, \dots$ con parámetro λ se escribe $X \sim poisson(\lambda)$:

$$p(i) = \mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad i = 0, \dots, n$$

- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- $P(X = i) = \frac{\lambda}{i} P(X = i - 1)$ Este dato sirve para calcular la función distribución que es media fea.
- Recordar que $e^\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$

def V.A Geométrica Esta variable aleatoria modela la probabilidad de obtener un primer éxito en el intento n , donde la probabilidad de éxito es $0 < p < 1 \sim Geom()$:

$$p(n) = \mathbb{P}(X = n) = (1 - p)^{n-1} p \quad n = 1, 2, \dots$$

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$
- $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \sum_{i \leq a} (1 - p)^{i-1} p = 1 - (1 - p)^a$

Variables Aleatorias Continuas

Se dice que X es una variable aleatoria absolutamente continua si es que existe una función no negativa llamada función de densidad tal que para todo conjunto B : $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx$ En particular debe cumplir que $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

La Función distribución de una variable aleatoria absolutamente continua sera diferenciable, y:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

def V.A Uniforme

Una variable aleatoria uniforme en un intervalo (a, b) tiene como función densidad a:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $F(j) = \int_{-\infty}^j f(x) dx = \frac{j-a}{b-a}$

def V.A Normal X sigue una variable aleatoria normal de media μ y varianza σ^2 ($\sim Norm(\mu, \sigma^2)$). Su función de densidad esta dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty$$

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$

def V.A Exponencial X sigue una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda > 0$ ($X \sim Exp(\lambda)$). Su función densidad esta definida como:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0.$$

en otro caso $f(x) = 0$.

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$. La exponencial cumple la propiedad de perdida de memoria.