Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
24 de abril de 2014

Auxiliar 5 MA3403

Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliar: Luis Fredes C.

Problemas

P1. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes con funciones de densidad discretas dadas por:

$$P(X=k)=P(Y=k)=p(1-p)^{k-1}$$

donde $k\in\{1,2,...\}$ y $p\in(0,1)$.

(a) Encuentre la densidad de $X+Y$ en $\{1,2,...\}$.

(b) Demuestre que $P(X=k|X+Y=n)=\frac{1}{n-1}$ con $k<n$.

P2. Una variable aleatoria X se dice que distribuye como una Poisson de parámetro $\lambda>0$ si

$$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Y se denota $X\sim Poisson(\lambda)$.
Encuentre la esperanza y la varianza de $X\sim Poisson(\lambda)$.

P3. Sean $(X_i : i\geq 1)$ una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuídas, tal que $X_i\sim$Bernoulli(p) con $p\in(0,1)$. Sea M una variable aleatoria que es independiente de todas las variables aleatorias $(X_i : i\geq 1)$ y tal que $M\sim$Poisson(λ) con $\lambda>0$.

Sea $k\geq 0$ fijo. Pruebe que

$$\sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=k, M=n\right)=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}.$$

Concluya que la variable aleatoria definida $S=\sum_{i=1}^{M}X_i$ se distribuye según una Poisson(λp). (Note que M siempre toma valores en los naturales).

P4. Sea X una variable aleatoria discreta cuya densidad de masa puntual está dada por

$$p_X(k)=\eta\left(\frac{1}{3}\right)^k, \quad k\in\mathbb{N}$$

(a) Calcular el valor de la constante η.

(b) Considere Z una variable aleatoria binomial de parámetros $n\in\mathbb{N}$ y $q\in(0,1)$ independiente de X. Calcular la densidad de $W=\text{mín}(X,Z)$.

P5. Sea $X\sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y\sim Poisson(\lambda_2)$. Si X e Y son independientes, demuestre que $X+Y\sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$.

P6. Sea F la función de distribución de alguna V.A real. Sea $F^{-1}(y)=\text{ínf}\{x|F(x)\geq y\}$, para $0\leq y\leq 1$. Sea U una variable aleatoria uniforme en $[0,1]$. Demuestre que la variable aleatoria $X=F^{-1}(U)$ tiene distribución F.