Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
17 de abril de 2014

Auxiliar 4 MA3403

Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliar: Luis Fredes C.

Problemas

P1. Sea X una variable aleatoria Geométrica(p), con $p \in (0,1)$. Pruebe que:

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = P(X = k) \ \forall n \geq 0, \ k \geq 1$$

Propuesto: Muestre que la recíproca también se tiene.

P2. Sea $X \sim Bin(n,p)$. Demuestre que:

$$\mathbb{P}(X \leq i) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq n - i - 1)$$

donde $Y \sim Bin(n, 1-p)$.

P3. Una variable aleatoria X se dice positiva si $\mathbb{P}(X > 0) = 1$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a i.i.d y positivas. Prebe que

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_k}{X_1 + \cdots + X_n}\right) = \frac{k}{n}$$

P4. Sea N una v.a a valores enteros no negativos. Demuestre que

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > k)$$

P5. Una Urna contiene n bolas enumeradas $1, 2, ..., n$. Una persona saca una bola y la devuelve, luego saca otra y la devuelve, continuando hasta sacar una bola por segunda vez. Sea X el numero de bolas sacadas hasta que se repite una bola.

a) Encuentre $\mathbb{P}(X \geq k)$.

b) Demuestre que:

$$\mathbb{E}(X) = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

P6. Demuestre que si X es una v.a. y a, b son constantes entonces:

(a) $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

(b) $\mathbb{V}ar(aX + b) = a^2 \mathbb{V}ar(X)$

(c) Sea $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X)}}$. Demuestre que $\mathbb{E}(Y) = 0$ y $\mathbb{V}ar(Y) = 1$.

P7. Una variable aleatoria X se dice que distribuye como una Poisson de parámetro $\lambda > 0$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Y se denota $X \sim Poisson(\lambda)$.
Encuentre la esperanza y la varianza de $X \sim Poisson(\lambda)$.

P8. Sean $(X_i : i \geq 1)$ una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuídas, tal que $X_i \sim$ Bernoulli(p) con $p \in (0,1)$. Sea M una variable aleatoria que es independiente de todas las variables aleatorias $(X_i : i \geq 1)$ y tal que $M \sim$ Poisson(λ) con $\lambda > 0$.

Sea $k \geq 0$ fijo. Pruebe que

$$\sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, M = n\right) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}\,.$$

Concluya que la variable aleatoria definida $S = \sum_{i=1}^{M} X_i$ se distribuye según una Poisson(λp). (Note que M siempre toma valores en los naturales).

P9. Sea X una variable aleatoria discreta cuya densidad de masa puntual está dada por

$$p_X(k) = \eta \left(\frac{1}{3}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

(a) Calcular el valor de la constante η.

(b) Considere Z una variable aleatoria binomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $q \in (0,1)$ independiente de X. Calcular la densidad de $W = \text{mín}(X, Z)$.

P10. Sea $X \sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y \sim Poisson(\lambda_2)$. Si X e Y son independientes, demuestre que $X + Y \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$.