AUX #3

P2 i) SUPONGAMOS

$$G_i \cap G_j \neq \emptyset$$

$\Rightarrow \exists$ UNA REALIZACIÓN QUE RECIBE PREMIO DE i y j. SUPONGAMOS $i<j$ ENTONCES EL JUGADOR GANA EL PREMIO DE LA MAQUINA i Y SE RETIRA DEL CASINO POR LO CUAL NO PUEDE GANAR EL PREMIO DE LA MAQ j, CONTRADICCIÓN.

$$\mathbb{P}(G_i) = \underbrace{(1-p)^{i-1}}_{\text{PERDER EN LAS MAQUINAS ANTERIORES}} \cdot p$$

$p \rightarrow$ GANAR EN LA ÚLTIMA.

ii) A = "JUGADOR NO GANA"

B_i = "

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} G_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(G_i) = \sum_{i=1}^{3} p(1-p)^{i-1}$$

$$= p \cdot \sum_{i=1}^{3} (1-p)^{i-1}$$

$$= p \sum_{i=0}^{2} (1-p)^{i}$$

$$= p \cdot \frac{1-(1-p)^3}{p}$$

$$= 1-(1-p)^3$$

$$\mathbb{P}(A) = 1-(1-(1-p)^3)$$

$$= (1-p)^3$$

iii) $\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) = 0 \neq \overbrace{p(1-p)}^{\mathbb{P}(G_2)} \cdot \overbrace{p}^{\mathbb{P}(G_1)}$

$\mathbb{P}(G_2 \cap G_3) = 0 \neq \underbrace{p(1-p)}_{\mathbb{P}(G_2)} \cdot \underbrace{p(1-p)^2}_{\mathbb{P}(G_3)}$

iv) $\mathbb{P}(G_i | A^c) = \dfrac{\mathbb{P}(G_i \cap A^c)}{\mathbb{P}(A^c)}$

$= \dfrac{\mathbb{P}(G_i)}{\mathbb{P}(A^c)} = \dfrac{p(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)^3}$

v) $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} G_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(G_i)$

$= \sum\limits_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}$

$= p \sum\limits_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} = p \sum\limits_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = p \cdot \dfrac{1 - \overbrace{\cancel{(1-p)^{n+1}}}^{0}}{p}$

$= 1.$

P3| i) S = "SABER LA RESPUESTA CORRECTA"
B = "CONTESTA BIEN"

$\mathbb{P}(S|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(B)}$

$= \dfrac{\mathbb{P}(B|S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(B|S)\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(B|S^c)\,\mathbb{P}(S^c)}$

$= \dfrac{1 \cdot p}{1 \cdot p + 1/m \,(1-p)}$

$= \dfrac{1}{1 + \dfrac{(1-p)}{mp}}$

ii) CUANDO $m \to \infty$

$\mathbb{P}(S|B) = 1$ (SI M SE VA A ∞ LE ACIERTA CON MUY BAJA PROB)

iii) CUANDO $p \to 0$

$\mathbb{P}(S|B) = 0.$ (SI $p \to 0$ EL ALUMNO CON BAJA PROB SABE LA RESPUESTA)

P4]

$$\mathbb{P}(X=m+k \mid X>m) = \mathbb{P}(X=k) \quad \forall m \geq 0,\ k \geq 1$$

$$\mathbb{P}(X=m+k \mid X>m) = \frac{\mathbb{P}(X>m,\ X=m+k)}{\mathbb{P}(X>m)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=m+k)}{\mathbb{P}(X>m)} \quad (\star)$$

$$\mathbb{P}(X>m) = \sum_{i=m+1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p(1-p)^{m} \sum_{j=1}^{\infty} (1-p)^{j-1}$$

$$= (1-p)^{m} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} p(1-p)^{j-1}}_{1}$$

$$= (1-p)^{m}$$

$$(\star) = \frac{p(1-p)^{m+k-1}}{(1-p)^{m}} = p(1-p)^{k-1}$$

$$= \mathbb{P}(X=k). \ \blacksquare$$

P5] $X \sim Bin(n,p)$. DEMUESTRE QUE

$$\mathbb{P}(X \leq i) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq n-i-1)$$

$$\mathbb{P}(X \leq i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} p^{j} (1-p)^{n-j}$$

$$= \sum_{k=n-i}^{n} \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n-i-1} \binom{n}{k} (1-p)^{k} p^{n-k}$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Y \leq n-i-1)$$

P6

a) $\mathbb{P}(X+Y=k)$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X+Y=k, Y=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=k-j, Y=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=k-j)\,\mathbb{P}(Y=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} p(1-p)^{k-j-1} \cdot p(1-p)^{j-1}$$

$$= p^2 \sum_{j=1}^{k-1} (1-p)^{k-2}$$

$$= p^2 (1-p)^{k-2} (k-1)$$

b) $$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=m)}{\mathbb{P}(X+Y=m)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=m-k)}{\mathbb{P}(X+Y=m)}$$

$$= \frac{\cancel{p^2} \cancel{(1-p)^{k-1}} \cancel{(1-p)^{n-k-1}}}{\cancel{p^2} \cancel{(1-p)^{n-2}} (n-1)}$$

$$= \frac{1}{n-1}$$