

AUX #1

PI a) SUPONGAMOS $\exists A, B$ TA

$$P(A) + P(B) - 1 > P(A \cap B) \quad (1)$$

SABEMOS QUE $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ (2)
PUES $(A \setminus B) \cup A \cap B = A$.

$$\Rightarrow (1) \Rightarrow P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B) - 1 > P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \setminus B) + P(B) > 1$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) > 1 \quad \times.$$

TAMBIEN CUMPLAMOS QUE

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B$$

$$\text{Y POR LO TANTO } P(A \setminus B) + P(B) = P(A \cup B).$$

b) INDUCCIÓN.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - 1}_{\text{H.I.}} \text{ POR a)}$$

$$\geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-2) - 1$$

$$\geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1).$$

c) SE SIGUE DE

$$1 \geq P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \underbrace{P(A_i)}_1 - (n-1) \\ \geq n - (n-1) = 1$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = 1$$

P2) a) PRIMERO NOTEMOS QUE

$$0 < P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$\Rightarrow P(A), P(B), P(A|B) > 0$$

$$\begin{aligned} \text{CON ESTO } P(A|B)P(B) &= P(B|A)P(A) \\ &= P(A|B)P(A) \\ \Leftrightarrow P(B) &= P(A) \end{aligned}$$

COMO

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{PERO } A &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

$$\text{ASÍ } (1) = (P(A \setminus B) + P(A \cap B)) + (P(B \setminus A) + P(A \cap B)) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

RECOPIANDO TENEMOS:

$$1 = P(A \cup B) = P(A) + \frac{P(B)}{P(A)} P(A) - P(A \cap B) < P(A) + \frac{P(B)}{P(A)} P(A)$$

$\Leftrightarrow$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 1 &< 2P(A) \\ 1/2 &< P(A) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B^c) &= P(B^c | A) P(A) \\
 &= (1 - P(B | A)) P(A) \\
 &= P(A) - P(B | A) P(A) \\
 &= P(A) - P(B \cap A) \quad (2) \\
 &= P(A) - P(A) P(B) \\
 &= P(A) (1 - P(B)) \\
 &= P(A) P(B^c)
 \end{aligned}$$

$\& (A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$
 CON ESTO

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B^c) + P(A \cap B) &= P(A) \\
 \Leftrightarrow P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\
 \text{Y LO MISMO DESDE (2)}
 \end{aligned}$$

c)

$$P(A \cap B) = P(B) - P(A^c \cap B)$$

AL IGUAL QUE ANTES

PERO $P(A^c) = 1 - P(A) > P(A \cap B) > 0$

$$\Rightarrow P(A^c \cap B) = 0$$

CON ESTO

$$P(A \cap B) = P(B) = P(B) \cdot 1 = P(B) P(A)$$

NOTAMOS QUE SI $P(A) = 0$ ENTONCES
 $P(A^c) = 1$ POR LO ANTERIOR A^c Y B SON INDEP
 Y POR b) SE TIENE QUE $A \perp B$.

d) NOTAMOS QUE

$$\begin{aligned}
 A \cup B &\supset A \supset A \cap B \\
 \Rightarrow P(A \cup B) &\geq P(A) \geq P(A \cap B) = P(A \cup B)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cup B)$$

ANALOGO PARA B

$$P(B) = P(A \cup B) = P(A)$$

P3 | NOTAMOS QUE

$$A_n \cap B_n \subset B_n$$

CON ESTO

Y POR LA SE TIENE $P(A_n \cap B_n) \leq P(B_n)$

$$P(A_n) + P(B_n) - 1 \leq P(A_n \cap B_n)$$

Y ASI

$$P(A_n) + P(B_n) - 1 \leq P(A_n \cap B_n) \leq P(B_n)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 1 + P - 1 & & P \\ P & & \end{array}$$

$$\Rightarrow P(A_n \cap B_n) \rightarrow P$$

P4 | V_1 = LA SEÑAL ENTREGADA ES UN UNO EN EL VISOR,
 E = " " " " EMITIDA ES UNO.

$$\begin{aligned} P(E | V_1 \cap V_2) &= \frac{P(V_1 \cap V_2 | E) P(E)}{P(V_1 \cap V_2)} \\ &= \frac{P(V_1 \cap V_2 | E) P(E)}{P(V_1 \cap V_2 | E) P(E) + P(V_1 \cap V_2 | E^c) P(E^c)} \end{aligned}$$

$$P(V_1 \cap V_2 | E) = 3/4 \cdot 4/5 \quad (\text{AMBOS RESP CORRECT})$$

$$P(V_1 \cap V_2 | E^c) = \underbrace{1/4}_{\text{SE EQ}} \cdot \underbrace{1/8}_{\text{DADO A ENTRE 2 RESP NUM}} \cdot \underbrace{1/5 \cdot 1/8}_{\text{IGUAL QUE EN A.}}$$

Así

$$\begin{aligned}
 P(E|V_1 \cap V_2) &= \frac{3/4 \cdot 4/5 \cdot 1/9}{3/4 \cdot 4/5 \cdot 1/9 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{9}{1}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{96}} = \frac{1}{\frac{97}{96}} = \frac{96}{97}
 \end{aligned}$$

PS) i) A = "SER CLASIFICADO COMO NO DEFECTUOSO"
 B = "SER DEFECTUOSO"

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \\
 &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \\
 &= \frac{1}{100} + \frac{81}{100} = \frac{82}{100} = \frac{41}{50}
 \end{aligned}$$

Donde $P(A|B) = 1/10 = P(B)$
 $P(A|B^c) = 9/10 = P(B^c)$

ii) $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{1/10 \cdot 1/10}{82/100} = \frac{1}{82}$

iii) $A_i =$ "EL RECIPIENTE i DE LA CATA ES DEFECTUOSO"
 $\bigcup_{i=1}^5 A_i =$ "EXISTE ALGÚN RECIPIENTE DEFECTUOSO"

NOTAMOS QUE $P(A_i) = P(B|A)$ NO DEPENDE DE LA BOTELLA

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \\
 &= 1 - P(A_1^c)^{\infty} \\
 &= 1 - (1 - P(A_1))^{\infty} \\
 &= 1 - \left(1 - \frac{1}{82}\right)^{\infty} \\
 &= 1 - \left(\frac{81}{82}\right)^{\infty} \quad \text{CLASE INDEF}
 \end{aligned}$$

P6 | NOTAMOS QUE

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{3\}$$

$$A_n = \{2n-1\}$$

CON UNA COLECCIÓN NUM DE CONJUNTOS DE CARDINAL FINITO Y POR LO TANTO EN $\mathcal{G}$. NOTAMOS QUE LA COLECCIÓN ES DISTINTA SI FUERA σ -ÁLGEBRA, ENTONCES $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$.

PERO

$$\left|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right| = |\text{NÚMEROS IMPARES}| = \infty$$

$$\text{Y } \left|\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c\right| = |\text{NÚMEROS PARES}| = \infty$$

Y POR LO TANTO NO ESTA EN $\mathcal{G}$. $\square$