Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
9 de abril de 2014

Auxiliar 3 MA3403

Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliar: Luis Fredes C.

Problemas

P1. Sea $A = \{1, ..., n\}$.

(a) Se eligen con reposición, independientemente y con ley equiprobable, dos puntos x e y de A. Calcular la probabilidad de que $x = y$.

(b) Se eligen un subconjunto B de A y un punto x de A, con reposición, de manera independiente y equiprobable, es decir, la elección de x es con ley equiprobable en A y la elección de B es con ley equiprobable en $\mathcal{P}(A)$ (cada subconjunto de A, incluyendo el conjunto vacío, tiene la misma probabilidad de ser escogido en$\mathcal{P}(A)$). Calcule la probabilidad de que $x \in B$. Recuerde que $|\mathcal{P}((A)| = 2^n$.

Hint: En b) puede serle útil condicionar con respecto a la cardinalidad de B.

P2. Uno de los casinos recientemente inaugurados en el país propone un juego "secuencial" que consiste en apostar en tres máquinas tragamonedas que funcionan independientemente, cada una con una probabilidad $p > 0$ de entregar premio. El jugador tiene acceso a la primera máquina, donde juega, pudiendo ganar o perder. Si gana debe cobrar su premio e irse del casino pero si pierde debe jugar en la segunda máquina. Nuevamente, si gana cobra el premio y deja el casino pero si pierde continúa en la tercera máquina, en la cual gana o pierde y se retira del casino. Considere los sucesos G_i: "el jugador recibe el premio de la máquina i", $i = 1, 2, 3$.

(i) Explique por qué los sucesos G_i son disjuntos y pruebe que

$$\mathbb{P}(G_i) = p(1-p)^{i-1}, \ i = 1, 2, 3.$$

(ii) Calcule la probabilidad de que el jugador no gane.

(iii) Averigüe si G_1, G_2 y G_2, G_3 son o no pares de sucesos independientes.

(iv) Sabiendo que el jugador ha ganado, calcule la probabilidad de que el premio lo haya obtenido en la maquina i, $i = 1, 2, 3$.

(v) Suponga que en lugar de 3 máquinas hay infinitas máquinas funcionando como se describe arriba. Muestre que la probabilidad de que el suceso G: "ganar premio" es 1, expresando G en términos de los G_i, $i = 1, 2, \ldots$

P3. En una prueba de alternativas, la probabilidad de que un alumno sepa la respuesta es p. Existen m alternativas, si el sabe la respuesta el responde correctamente con probabilidad 1; si no sabe el responde correctamente con probabilidad $\frac{1}{m}$.

i) Cual es la probabilidad de que el haya sabido la respuesta dado que el respondió bien.

ii) Calcule el limite de esta probabilidad cuando $m \to \infty$.

iii) Calcule el limite de esta probabilidad cuando $p \to 0$.

P4. Sea X una variable aleatoria Geométrica(p), con $p \in (0, 1)$. Pruebe que:

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = P(X = k) \ \forall n \geq 0, \ k \geq 1$$

Propuesto: Muestre que la recíproca también se tiene.

P5. Sea $X \sim Bin(n, p)$. Demuestre que:

$$\mathbb{P}(X \leq i) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq n - i - 1)$$

donde $Y \sim Bin(n, 1 - p)$.

P6. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes con funciones de densidad discretas dadas por:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

donde $k \in \{1, 2, ...\}$ y $p \in (0, 1)$.

(a) Encuentre la densidad de $X + Y$ en $\{1, 2, ...\}$.

(b) Demuestre que $P(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n-1}$ con $k < n$.