Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
22 de Marzo de 2013

Auxiliar 2 MA3403

Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliar: Luis Fredes C.

Resumen

Análisis Combinatorio.

Principio del Multiplicación. Si un hecho puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si una vez realizado éste se sabe que otro hecho puede realizarse de n_2 maneras diferentes, entonces el número de maneras diferentes que puede realizarse ambos a la vez, en este orden, es $n_1 \cdot n_2$ maneras diferentes. En general

$$N_{total} = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Permutaciones (Variaciones) Simples. Son las diferentes ordenaciones que se pueden hacer en un arreglo de tamaño r con n elementos distinguibles, donde los objetos se pueden usar sólo una vez.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Obs: Usualmente se le llama permutación al caso especial $r = n$ donde:

$$P_n = n!$$

Permutaciones con elementos repetidos. Si se tienen n elementos divididos en k grupos, con n_i: cant. de objetos tipo i, tq $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El total de permutaciones posibles es:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$$

Combinaciones. Dada una agrupación de n elementos, la cantidad de subconjuntos de k elementos de dicha agrupación está dada por:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Obs: El númeto total de subconjuntos no vacíos que se pueden formar es: $2^n - 1$

Axiomática de Probabilidades

Axiomas

(A1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(A3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia disjunta de eventos, entonces $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Propiedades

(1) σ-Subaditividad: Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de eventos. Entonces $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$

(2) Aditividad: Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de eventos disjuntos. Entonces $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$

(3) Monotonía: Sean A, B eventos. Si $A \subseteq B$, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(4) Subaditividad: Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de eventos, entonces $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$

(5) Propiedad del Complemento: $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(6) Principio de Inclusión y Exclusión: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
Generalización: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i) - \sum_{i,j}\mathbb{P}(A_i\cap A_j) + \sum_{i,j,k}\mathbb{P}(A_i\cap A_j\cap A_k) - ... + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$

Problemas

P1. Una fabrica produce un determinado tipo de recipiente. Cada recipiente producido tiene probabilidad constante igual a $\frac{1}{10}$ de ser defectuoso. Antes de que esos recipientes sean empacados, ellos son inspeccionados uno a uno y los defectuosos son eliminados. Los items son empacados en cajas de 5 unidades.Suponga que existe una probabilidad igual a $\frac{1}{10}$ de que un recipiente sea mal clasificado como defectuoso o no.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que un recipiente cualquiera sea clasificado como no defectuoso?
ii) ¿Cuál es a probabilidad de que un recipiente cualquiera que haya sido clasificado como no defectuoso sea defectuoso?
iii) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja embalada tenga algún recipiente defectuoso?

P2. Sea $\Omega = \mathbb{N}$ un conjunto cualquiera. Considere la siguiente clase de conjuntos:

$$\mathcal{C} = \{A \subset \Omega \,/\, |A| < \infty \,\vee\, |A^c| < \infty\}$$

Demuestre que $\mathcal{C}$ no es $\sigma-$álgebra.

P3. Sea $A = \{1, ..., n\}$.

(a) Se eligen con reposición, independientemente y con ley equiprobable, dos puntos x e y de A. Calcular la probabilidad de que $x = y$.

(b) Se eligen un subconjunto B de A y un punto x de A, con reposición, de manera independiente y equiprobable, es decir, la elección de x es con ley equiprobable en A y la elección de B es con ley equiprobable en $\mathcal{P}(A)$ (cada subconjunto de A, incluyendo el conjunto vacío, tiene la misma probabilidad de ser escogido en$\mathcal{P}(A)$). Calcule la probabilidad de que $x \in B$. Recuerde que $|\mathcal{P}((A)| = 2^n$.

Hint: En b) puede serle útil condicionar con respecto a la cardinalidad de B.

P4. Pruebe, usando un argumento combinatorial, la siguiente identidad

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}.$$

P5. Una mano de póker consta de 5 cartas escogidas al azar de un total de 52 que posee el mazo inglés. El joven Mixtor es un ferviente jugador de póker y esta interesado en calcular la probabilidad de obtener:

- **(a) Color:** Las 5 cartas son de la misma pinta.
- **(b) Un par:** Dos cartas tienen el mismo número entre sí, y las tres restantes tienen números distintos al resto y entre sí.
- **(c) Dos pares:** Dos cartas tienen el mismo número entre sí, otras dos poseen el mismo número entre sí, pero distinto al anterior, y la última tiene un número distinto al resto.
- **(d) Un trío:** La misma lógica que un par.
- **(e) Póker:** Cuatro cartas tienen el mismo número.

P6. Tres parejas digamos A, B y C, se sientan en una fila. Suponga que todos los ordenamientos son igualmente probables.

- **(a)** Pruebe que hay $2^3 3!$ ordenamiento distintos tales que todos los esposos queden sentados junto a sus respectivas esposas.
- **(b)** Pruebe que la probabilidad de que algun esposo se siente con su respectiva esposa es $2/3$.
  Hint: Utilice el principio inlcusión/exclusión.