Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
22 de Marzo de 2013

Auxiliar 1 MA3403

Profesor: Sebastián Zamorano
Auxiliar: Luis Fredes C.

Resumen

Definición: Sean A, B eventos tales que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilidad de A condicionado por B se define por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Fórmula de Bayes: Dados A, B eventos, se tiene que:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Probabilidades Totales: Sea Ω un espacio muestral y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ partición de Ω, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

Multiplicación de Probabilidades: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos, entonces:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}(A_i|A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}) = \mathbb{P}(A_n)\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i|A_{i+1} \cap \cdots \cap A_n)$$

Definición: Diremos que dos eventos A y B son independientes si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Problemas

P1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio muestral.

(a) Sean $A, B \subseteq \Omega$ pruebe que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

(b) Dados $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Omega$ pruebe que:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$$

(c) Verifique que si $A_1, \ldots, A_n$ son eventos tales que $\mathbb{P}(A_i) = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1.$$

P2. **(a)** Suponga que A y B son dos eventos tales que $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$ y $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$. Pruebe que entonces $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$.

(b) Pruebe que si A y B son dos eventos independientes, entonces A y B^c también son eventos independientes.

(c) Pruebe que si $\mathbb{P}(A) = 1$, entonces para todo B se tiene que A y B son independientes. Concluya el mismo resultado para el caso $\mathbb{P}(A) = 0$.

(d) Sean A y B dos sucesos. Pruebe que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$$

P3. Si $A_1, A_2, \ldots$ y $B_1, B_2, \ldots$ son eventos aleatorios en un mismo espacio de probabilidad tal que $\mathbb{P}(A_n) \to 1$ y $\mathbb{P}(B_n) \to p$ cuando $n \to \infty$. Demuestre que $\mathbb{P}(A_n \cap B_n) \to p$.

P4. Suponga que un instrumento emite una señal numérica al azar, con valores en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Dicha señal es recibida por dos sensores A y B, cada uno de los cuales despliega la señal en un visor. Se sabe que el sensor A despliega correctamente la señal con probabilidad $\frac{3}{4}$ y que el sensor B lo hace con probabilidad $\frac{4}{5}$. Dado que ambos sensores muestran en sus visores el valor 1, muestre que la probabilidad de que la señal emitida sea realmente 1 es $\frac{96}{97}$. Para resolver el problema suponga que los sensores funcionan bien o mal, independientemente uno del otro, cualquiera haya sido la señal emitida. Suponga también que si un sensor falla, entonces despliega una señal cuyo valor es cualquier número, distinto de la verdadera señal, escogido al azar.

P5. Una fabrica produce un determinado tipo de recipiente. Cada recipiente producido tiene probabilidad constante igual a $\frac{1}{10}$ de ser defectuoso. Antes de que esos recipientes sean empacados, ellos son inspeccionados uno a uno y los defectuosos son eliminados. Los items son empacados en cajas de 5 unidades.Suponga que existe una probabilidad igual a $\frac{1}{10}$ de que un recipiente sea mal clasificado como defectuoso o no.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que un recipiente cualquiera sea clasificado como no defectuoso?

ii) ¿Cuál es a probabilidad de que un recipiente cualquiera que haya sido clasificado como no defectuoso sea defectuoso?

iii) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja embalada tenga algún recipiente defectuoso?

P6. Sea $\Omega = \mathbb{N}$ un conjunto cualquiera. Considere la siguiente clase de conjuntos:

$$\mathcal{C} = \{A \subset \Omega \,/\, |A| < \infty \,\vee\, |A^c| < \infty\}$$

Demuestre que $\mathcal{C}$ no es $\sigma-$álgebra.