Ejercicio Distribución Gamma

MA3403 - Probabilidades y Estadstica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martin Castillo & José Cereceda
11 de mayo de 2014

Resumen

Algunas distribuciones Importantes

- Normal $N(\mu, \sigma^2)$
  Sea $\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se tiene
  $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
- Gamma $G(r, \alpha)$
  Sean $r, \alpha > 0$. Si $X \sim G(r, \alpha)$, se tiene
  $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^r x^{r-1} \cdot e^{-\alpha x}}{\Gamma(r)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$
  donde
  $$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx \quad r > 0$$

Problemas

P1. Sea $X \sim N(0,1)$. Demuestre que $X^2 \sim G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Solución:
Si $Y \sim \chi_1^2 = Gamma(1/2, 1/2) \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{y}} & y > 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$
Ahora, para $X \sim N(0,1)$:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^2 \leq r) &= \mathbb{P}(-\sqrt{r} \leq X \leq \sqrt{r}) \\ &= 2\mathbb{P}(0 \leq X \leq r) \quad \text{por la simetría de la normal} \\ &= 2\int_0^{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^r \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2} dy \quad (c.v.\ y = x^2) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq r) \end{aligned}$$
con $Y \sim \chi_1^2$
$$\therefore X^2 \sim Y \sim Gamma(1/2, 1/2)$$

P2. *Propuesto:* Sea $X \sim G\,(r, \alpha)$

a) Muestre que $Y = 2\alpha X$ sigue una distribución χ_{2r}^2
b) Muestre que si $Z \sim N(0,1)$ entonces $Y = Z^2 \sim \chi_1^2 = G\,(1, 1/2)$