

PAUTA CONTROL 1

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIARES: MARTÍN CASTILLO & JOSÉ CERECEDA

16 DE ABRIL DE 2014

- P1.** a) Considere el siguiente experimento; a usted le entregan 5 cartas de un mazo de naipes inglés (52 cartas, sin comodines). Determine que tiene mayor probabilidad:

- Formar "color" (todas las cartas de la misma pinta).
- Formar "escala" (5 cartas consecutivas hasta $\{10, J, Q, K, A\}$).

Plantee el espacio muestral.

R: Como se trata de como entregan 5 cartas al azar dentro del mazo, podemos considerar el espacio muestral de la siguiente forma

$$\Omega = \{\{x_1, \dots, x_5\} : x_i \in \{A\heartsuit, \dots, K\heartsuit, A\diamondsuit, \dots, K\diamondsuit, A\clubsuit, \dots, K\clubsuit, A\spadesuit, \dots, K\spadesuit\}, x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_5\}$$

con esto observamos que $|\Omega| = \binom{52}{5}$

Ahora, para formar color, basta observar que debemos agrupar 5 cartas dentro de un grupo de 13 cartas de la misma pinta, y como existen 4 pintas, se obtiene que existen $\binom{13}{5} \cdot 4$ formas de obtener lo anterior.

Por otro lado, para formar escala se puede obtener con los siguientes subconjuntos $\{A, 2, \dots, 5\}$, $\{2, 3, \dots, 6\}$, ..., $\{10, J, \dots, K\}$ y cada uno de ellos se puede obtener de 4^5 formas distintas cambiando la pinta, luego existen $10 \cdot 4^5$ formas de obtener escala, luego es más probable obtener escala

- b) Se dispone de un revolver con capacidad para n balas, y se insertan k al azar. Dos personas juegan a la Ruleta Rusa (girando la rueda después de cada disparo). Calcule la probabilidad que el que comienza disparando muera. ¿Cómo deben ser n, k para que el juego sea equilibrado?

Plantee el espacio muestral.

R: Veamos primero que el espacio muestral se puede escribir de la forma $\Omega = \{(x_1, \dots, x_j, B) : j \in \mathbb{N}, x_i = NB\}$ donde NB indica que no hay bala en el i -ésimo disparo. y B indica que hay una bala en el último disparo (es decir el jugador muere)

Notar que podemos escribir la probabilidad de la siguiente manera

$$\mathbb{P}(\text{primer jugador muera}) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}((x_1, \dots, x_{2i}, B))$$

y considerando cada disparo independiente del otro se tiene que $\mathbb{P}((x_1, \dots, x_{2i}, B)) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)$ luego

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{primer jugador muera}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}((x_1, \dots, x_{2i}, B)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{2\frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{k}{n}} \end{aligned}$$

Luego para que el juego sea equilibrado se debe cumplir que $k/n \rightarrow 0$

- P2.** a) Se lanza un dado perfecto, sea J el resultado obtenido. Luego se tiran dos monedas (en forma independiente) tal que $\mathbb{P}(\text{cara}) = J/6$. Calcule la probabilidad de que J sea par, si se obtuvieron dos sellos.

R: Lo que se debe calcular es la $\mathbb{P}(J \text{ Sea par} \mid \text{Obtuvieron 2 sellos})$. Esto se puede desarrollar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J \text{ Sea par} \mid \text{Obtuvieron 2 sellos}) &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(J = 2i \mid \text{Obtuvieron 2 sellos}) \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(\text{Obtener 2 sellos} \mid J = 2i) \mathbb{P}(J = 2i) / \mathbb{P}(\text{Obtener 2 sellos})\end{aligned}$$

ahora observar que cada moneda es independiente de la otra, luego $\mathbb{P}(\text{Obtener 2 sellos} \mid J = 2i) = (\frac{2i}{6})^2 = \frac{i^2}{9}$ y $\mathbb{P}(2 \text{ sellos}) = \mathbb{P}(1 \text{ sello})^2$. Ahora fijandonos que la probabilidad de obtener un sello esta condicionada con respecto del dado, y en virtud del teorema de probabilidades totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 \text{ Sello}) &= \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(1 \text{ Sello} \mid J = i) \mathbb{P}(J = i) \\ &= \sum_{i=1}^6 \frac{i}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{21}{36}\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J \text{ Sea par} \mid \text{Obtuvieron 2 sellos}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{i^2}{9} \frac{1}{6} \left(\frac{36}{21}\right)^2 \\ &= \frac{14}{54} \left(\frac{36}{21}\right)^2\end{aligned}$$

- b) Si en una encuesta se desea preguntar por un tema delicado (como por ejemplo el aborto), y las personas no están dispuestas a contestar abiertamente. Se utiliza el siguiente procedimiento encubierto: al encuestado se le presentan dos preguntas:

A) ¿Esta de acuerdo con el aborto?

B) ¿Esta en desacuerdo con el aborto?

y se le pide extraer de una urna que contiene dos preguntas A y una pregunta B, y que conteste aquella que extrajo. Por último, el encuestado responde SI o NO. Sea $p = \mathbb{P}(\text{estar de acuerdo con el aborto})$.

- 1) Si una persona respondió SI, calcule la probabilidad de que este a favor del aborto, en función de p .

R: Para cada persona se le definen las siguientes variables $X \in \{F, C\}$, $P \in \{A, B\}$ y $R \in \{S, N\}$. Donde X , P y R representan la postura de la persona con respecto al aborto, pregunta que saco de la urna y respuesta respectivamente. Entonces calculemos:

$$\mathbb{P}(X = F \mid R = S) = \mathbb{P}(R = S \mid X = F) \frac{\overbrace{\mathbb{P}(X = F)}^p}{\mathbb{P}(R = S)}.$$

$$\mathbb{P}(R = S \mid X = F) = \mathbb{P}(R = S \mid X = F, P = A) \mathbb{P}(P = A) + \mathbb{P}(R = S \mid X = F, P = B) \mathbb{P}(P = B)$$

$$= 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbb{P}(R = S) = \underbrace{\mathbb{P}(R = S|X = F)}_{\frac{2}{3}} \underbrace{\mathbb{P}(X = F)}_p + \underbrace{\mathbb{P}(R = S|X = C)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\mathbb{P}(X = C)}_{1-p}$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(X = F|R = S) = \frac{2}{3} \frac{p}{\frac{2p}{3} + \frac{1-p}{3}} = \frac{2p}{1+p}.$$

- II) Si a usted le entregan como resultado la proporción (probabilidad) de personas que respondió SI, calcule la proporción (probabilidad) de personas que este a favor del aborto.

R: Por la parte anterior tomando q como la proporción

$$\mathbb{P}(R = S) = \frac{1+p}{3} = q \iff p = 3q - 1 = \mathbb{P}(X = F).$$

P3. Sea X una v.a. con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{\beta x} & x > C \\ 0 & x \leq C \end{cases}$$

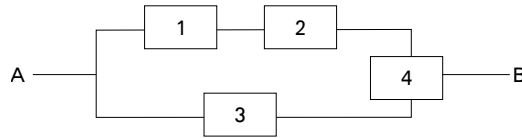
- a) Determine α, β, C para que $f(x)$ este bien definida.

R: Para que f sea una función de densidad tiene que cumplir que:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \alpha \int_c^{\infty} e^{\beta x} dx = \frac{\alpha}{\beta} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\beta x} - e^{\beta c} \right]$$

Así las condiciones son: $\beta < 0$ y $-\frac{\alpha}{\beta} e^{\beta c} = 1$.

- b) Considere $\alpha = 1, \beta = -1, c = 0$, si X representa el tiempo (en años) que tarda en explotar un puente con dinamita. Y se sabe que se instaló dinamita al mismo tiempo a cuatro puentes. Calcule la probabilidad de que exista por lo menos un camino de A hasta B por al menos 6 meses. Suponga que la explosión de cada puente es independiente de los demás.



R: Para que exista camino de A a B por al menos 6 meses se tiene que cumplir que

$$x_4 > \frac{1}{2} \wedge \left[\left(x_1 > \frac{1}{2} \wedge x_2 > \frac{1}{2} \right) \vee x_3 > \frac{1}{2} \right],$$

donde $x_1, \dots, x_4$ representan el tiempo que tardan en explotar los puentes 1,...,4 respectivamente. Todas esas v.a. tienen como función densidad a f .

$$\mathbb{P}(x_i > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall i = 1, \dots, 4.$$

Desarrollando la condición anterior:

$$= \mathbb{P}(x_4 > \frac{1}{2}) \left[\mathbb{P}(x_1 > \frac{1}{2} \wedge x_2 > \frac{1}{2}) \vee x_3 > \frac{1}{2} \right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \left[e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \right] = e^{-1} + e^{-\frac{3}{2}} - e^{-2}$$

c) Determine el número de vectores $(x_1, \dots, x_n)$ tales que $x_i \in \{0, 1\}$ para $i = 1, \dots, n$ y

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq k$$

, evalúe su resultado para $k = 1$. **R:** Notando que para que ocurra que $\sum_{i=1}^n x_i \geq k$, como se

trata de números enteros, debe ocurrir que $\sum_{i=1}^n x_i = j$ para algún $j \in \{k, k+1, \dots, n\}$, y para que la última sumatoria ocurra, se deben combinar j unos dentro de los n elementos posibles, y para esto existen $\binom{n}{j}$ formas distintas. Luego la cantidad de vectores que cumplen la relación es $\sum_{j=k}^n \binom{n}{j}$, ahora para $k = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} - \binom{n}{0} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$