Auxiliar 6: V.A. BIDIMENSIONALES Y ESPERANZA

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliar: Martin Castillo - Jose Cereceda
24 de abril de 2014

Resumen.

Teorema de Cambio de Variables bi-dimensional
Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta $f_{X,Y}$. Sean $Z = H_1(X,Y)$, $W = H_2(X,Y)$ funciones tales que satisfacen:

(i) $z = H_1(x,y) \wedge w = H_2(x,y)$ tienen solución única para x, y en función de z, w. Esto es, $x = G_1(z,w),\ y = G_2(z,w)$

(ii) $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}$ existen y son continuas.

Entonces,

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(G_1(z,w), G_2(z,w))|J(z,w)|$$

donde $J(z,w)$ corresponde al Jacobiano de la transformación, ie,

$$J(z,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Esperanza.
Sean X v.a, se define

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int x \cdot f_X(x)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedades.

(1) Si $X = \alpha$, entonces $\mathbb{E}(X) = \alpha$

(2) Si X, Y son variables aleatorias, entonces $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$

(3) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$

(4) Si X v.a. y $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene entonces

$$\mathbb{E}(\Psi(X)) = \begin{cases} \sum_{i \in I} \Psi(x_i) \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int \Psi(x) \cdot f_X(x)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

(5) Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Problemas.

P1. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} kx(x-y) & , \ 0 < x < 2, \quad -x < y < x \\ 0 & \sim \end{cases}$$

(a) Encuentre la constante k tal que la función anterior sea una función. de densidad.

(b) Encuentre la función de densidad marginal de X.

(c) Encuentre la función de densidad marginal de Y.

P2. Suponga que se tiene un circuito en el cual varían de modo aleatorio e independiente la corriente I y la resistencia R, según las leyes siguientes:

$$I : f_I(i) = \begin{cases} 2i & 0 \leq i \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad R : f_R(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{9} & 0 \leq r \leq 3 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Encuentre $f_E(e)$, con $E = IR$.

P3. Sea $\vec{x}$ un punto escogido de manera aleatoria en un círculo de radio 1. Usando el T.C.V. encuentre la densidad de la v.a. R definida como la distancia desde el punto $\vec{x}$ al centro de círculo.

P4. Calcule la esperanza de las siguientes variables:

- $X \sim Binom(n, p)$.
- $X \sim Poisson(\lambda)$.

P5. Un experimento consiste en disparar una partícula desde el origen del plano cartesiano en un ángulo α respecto al eje de las abscisas. Suponiendo que el ángulo de disparo es una variable aleatoria que distribuye $\alpha \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se define una nueva variable aleatoria Y como la altura a la cual la partícula cruza la recta de ecuación $x = 1$.

a) Determine la función de densidad de Y.

b) Muestre que $\mathbb{E}(Y)$ no existe.