Examen

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA
PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIARES: ANTONIO LIZAMA & JOSÉ CERECEDA
7 DE JULIO DE 2014

P1. Sean X e Y independientes tal que $X \sim N(0, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$.

a) (2 puntos) Si $Z = \frac{X}{Y}$, use el Teorema de Cambio de Variable para mostrar que:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi(z^2 + 1)}, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Respuesta: Consideramos el siguiente cambio de variable: $Z = \frac{X}{Y}$ y $W = Y$. Luego por el TCV:

$$f_{Z,W}(z, w) = f_{X,Y}(wz, w)|w| = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{w^2(z^2+1)}{2\sigma^2}} |w|.$$

Luego para encontrar la distribución de Z integramos con respecto a w , así:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2(z^2+1)}{2\sigma^2}} |w| dw = \frac{2}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{w^2(z^2+1)}{2\sigma^2}} w dw \\ &= \left[-e^{-\frac{w^2(z^2+1)}{2\sigma^2}} \frac{1}{\pi\sigma^2} \frac{1}{2} \frac{2\sigma^2}{z^2+1} \right]_{w=0}^{w=\infty} = \frac{1}{\pi(z^2+1)}. \end{aligned}$$

b) (2 puntos)

1) Calcule sin usar la parte a): $\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} > 1\right)$.

Respuesta: Dibujamos en $\mathbb{R}^2$ la región que nos sirve y observamos que corresponde a dividir el espacio en 8 partes equiprobables de las cuales nos sirven solo 2 por lo que:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} > 1\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

2) Suponiendo $\sigma^2 = 1$, calcule: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{4X - 2Y + 3}{2}\right| > 1\right)$.

Respuesta: Calculemos $\mathbb{P}\left(\left|\frac{4X - 2Y + 3}{2}\right| < 1\right)$ pues

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{4X - 2Y + 3}{2}\right| > 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{4X - 2Y + 3}{2}\right| < 1\right).$$

Entonces:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{4X - 2Y + 3}{2}\right| < 1\right) = \mathbb{P}\left(-1 < \frac{4X - 2Y + 3}{2} < 1\right) = \mathbb{P}(-5 < 4X - 2Y < -1).$$

Por otro lado como $X, Y \sim N(0, 1)$ entonces, $4X - 2Y \sim N(0, 20)$. Y entonces

$$Z = \frac{4X - 2Y}{\sqrt{20}} \sim N(0, 1).$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{4X - 2Y + 3}{2}\right| < 1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{-5}{\sqrt{20}} < Z < \frac{-1}{\sqrt{20}}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{20}}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right) = 0,2815.$$

Así,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{4X - 2Y + 3}{2}\right| > 1\right) = 0,7185.$$

- c) (2 puntos) Suponga σ^2 desconocido; sean $X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_k$ muestras aleatorias simples de X e Y respectivamente. Sean:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}, \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^k Y_i^2}{k}.$$

- 1) Muestre que $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ son insesgados.

Respuesta:

$$\mathbb{E}(\hat{\sigma}_1^2) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) - \underbrace{\mathbb{E}(X_i)^2}_{=0} = \frac{\text{Var}(X)n}{n} = \sigma^2.$$

Análogo para $\hat{\sigma}_2^2$.

- 2) Se propone como estimador de σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = a\hat{\sigma}_1^2 + b\hat{\sigma}_2^2.$$

Determine a y b para que $\hat{\sigma}^2$ sea insesgado y de varianza mínima.

Respuesta: Para que $\hat{\sigma}^2$ sea insesgado se debe cumplir que:

$$\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \Leftrightarrow a\mathbb{E}(\hat{\sigma}_1^2) + b\mathbb{E}(\hat{\sigma}_2^2) = \sigma^2 \Leftrightarrow (a+b)\sigma^2 = \sigma^2 \Leftrightarrow a+b=1.$$

Ahora minimizamos la varianza sujeto a $a+b=1$:

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = a^2\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) + (a-1)^2\text{Var}(\hat{\sigma}_2^2).$$

Derivando con respecto a a e igualando a cero llegamos a:

$$a = \frac{\text{Var}(\hat{\sigma}_2^2)}{\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) + \text{Var}(\hat{\sigma}_2^2)} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}} = \frac{n}{n+k}.$$

- P2.** a) (4 puntos) Se elige un punto al azar en un círculo de radio R . Si su distancia al centro es menor a $\frac{R}{3}$ gana $6UM$, si esta entre $\frac{R}{3}$ y $\frac{2R}{3}$ gana $3UM$ y si es mayor a $\frac{2R}{3}$ gana $0UM$. Una persona (A) elige 30 puntos y otra (B) 40 puntos (todos en forma independiente). Calcule la probabilidad que A obtenga más UM que B .

Respuesta: Supongamos que $A_1, \dots, A_{30}$ y $B_1, \dots, B_{40}$ son los lanzamientos respectivamente de A y B . Tenemos que calcular:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{30} A_i > \sum_{i=1}^{40} B_i\right).$$

Notamos lo siguiente $\mathbb{E}(A_i) = \mathbb{E}(B_i) = \mu$ y $\text{Var}(A_i) = \text{Var}(B_i) = \sigma^2$. Así, ocupando el TCL:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{30} A_i > \sum_{i=1}^{40} B_i\right) &= \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{30} A_i - 30\mu}{\sigma\sqrt{30}}}_{=Z \sim N(0,1)} \frac{1}{\sqrt{40}} - \frac{10\mu}{\sigma\sqrt{30}\sqrt{40}} > \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{40} B_i - 40\mu}{\sigma\sqrt{40}}}_{Z' \sim N(0,1)} \frac{1}{\sqrt{30}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z\sqrt{30} - Z'\sqrt{40} > \frac{10\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(W > \frac{10\mu}{\sigma\sqrt{70}}\right). \end{aligned}$$

De donde como $Z, Z' \sim N(0,1)$ entonces, $Z\sqrt{30} - Z'\sqrt{40} \sim N(0,70)$ y

$$W = \frac{Z\sqrt{30} - Z'\sqrt{40}}{\sqrt{70}} \sim N(0,1).$$

Solo nos falta calcular μ y σ . De donde sacamos $\mu = \frac{5}{3}$ y $\sigma^2 = \frac{38}{9}$. Así,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{30} A_i > \sum_{i=1}^{40} B_i\right) = \mathbb{P}\left(W > \frac{10 \cdot \frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{38}{9}}\sqrt{70}}\right) = 1 - 0,8315 = 0,1685.$$

- b) (2 puntos) Sea $X_1, X_2, \dots$, sucesión de v.a. independientes tal que $X_i \sim B(1, p)$ (Bernoulli de parámetro p). Sea $N \sim Poisson(\lambda)$ independiente de X_i para todo i , y :

$$X = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Muestre que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$.

Respuesta: Lo primero que hay que observar es que X con N fijo distribuye como binomial:

$$X|N \sim B(N, p).$$

Con esto podemos usar probabilidades totales:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k|N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = k|N = n)\mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n \lambda^n}{n!} \\ &= \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

- P3.** La publicidad de cierto automovil afirma que el modelo tendra un rendimiento mayor a 18 kilometros por Litro.

5 autos que rinden más de 18 km/l

Conformamos un póker invencible en temas de rendimiento y variado estilo. Un sedán, un citycar y tres hatchbacks compactos para ayudar la decisión del auto nuevo. Sobre todo en estos tiempos, cuando baja la temperatura y cada semana suben los precios de los combustibles.

Se hace un estudio con 9 vehículos encontrándose los siguientes resultados (en km/lt):

15,6	18,6	18,3
20,1	21,5	18,4
19,1	20,4	19

Suponga que el rendimiento es una v.a. Normal.

- a) (3 puntos) Realice un test de hipótesis para estudiar lo afirmado en la publicidad, suponiendo $\sigma^2 = 2,5 \text{ km}^2/\text{lt}^2$. Plantee las hipótesis, región de rechazo (critica) y concluya con un nivel de significación $\alpha = 0,05$. Calcule el p -Valor. ¿ Existe publicidad engañosa?

Respuesta: $\bar{X} = 19$. Planteamos el siguiente test de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 : & \mu < 18 \\ H_1 : & \mu > 18 \end{aligned}$$

Entonces la región de rechazo (critica) esta dada por $R = \{\bar{X} > c\}$. Donde c tiene que cumplir que:

$$\mathbb{P}(\bar{X} > c|H_0) = 0,05.$$

Ocupando el estadístico $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$. Y obtenemos que:

$$\frac{c - 18}{\sqrt{2,5}/\sqrt{9}} = 1,65 \Leftrightarrow c = 18,869.$$

Calculemos el p -Valor:

$$p - Valor = \mathbb{P} \left(Z > \frac{19 - 18}{\sqrt{2,5}/\sqrt{9}} \right) = 0,03 < 0,05 = \alpha.$$

Por lo tanto rechazamos H_0 . Creemos que no hay publicidad engañosa.

- b) (2 puntos) En otro estudio se consideraron 90 vehículos conducidos por Hombres Adultos, Mujeres Adultas y Jóvenes, obteniéndose:

Conductores	< 18	18 - 20	> 20
Hombre	12	21	7
Mujer	4	13	8
Joven	6	9	10

¿Depende el rendimiento del tipo de conductor? Considere $\alpha = 0,1$.

Respuesta: Realizamos un test de independencia. Y calculamos el p -Valor:

$$p - Valor = \mathbb{P} \left(Q > \underbrace{Q_{obs}}_{5,268} | H_0 \right) = 0,25 > 0,1 = \alpha.$$

Donde Q distribuye como chi-cuadrado con 4 grados de libertad. Por lo tanto no se rechaza la hipótesis de que exista independencia.

- c) (1 puntos) Construya un IC para σ^2 del tipo cota superior ($\sigma^2 <$) con un 90 % de confianza.

Respuesta: Queremos encontrar $c = c(X_1, \dots, X_n)$ tal que:

$$\mathbb{P}(\sigma^2 < c) = 0,9 \Leftrightarrow \mathbb{P} \left((n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < (n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{c} \right) \Leftrightarrow c = \frac{8 \cdot 2,5}{1,65} = 12,12.$$

Pues $(n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ distribuye como chi cuadrado con 8 grados de libertad. Así el IC con confianza del 90 % sería (0; 12,12).