Auxiliar 10: Estimación

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martin Castillo & José Cereceda
28 de mayo de 2014

Resumen

1. Teorema central del límite (TCL).

   Sean $X_1, ..., X_n$ v.a.'s *i.i.d.* Sean $\mu = \mathbb{E}(X_i)$, $\sigma^2 = Var(X_i)$ la esperanza y varianza respectivamente. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ y $Var(S_n) = n\sigma^2$, y:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n := \frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1) \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq t) = \Phi(t)$$

   donde $\Phi(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ cuando $X \sim N(0,1)$, valor que se obtiene de la tabla.

2. Error cuadrático medio de $\hat{\theta}$:

$$ECM(\hat{\theta}) = \mathbb{E}((\hat{\theta} - \theta)^2)$$

   Proposición.

$$\begin{aligned} ECM(\hat{\theta}) &= Var(\hat{\theta}) + \text{Sesgo}^2(\hat{\theta}) \\ &= Var(\hat{\theta}) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta)^2 \end{aligned}$$

   Un estimador se dice insesgado si Sesgo($\hat{\theta}$)=0, ie, $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$.

3. Consistencia: $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1 \ \forall\varepsilon \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0 \ \forall\varepsilon$$

4. Método de los momentos: Sea X v.a. y $X_1, ..., X_n$ m.a.s.
   Se define el momento "teórico"de orden k como: $M_k = \mathbb{E}(X^k)$, y el momento "muestral"de orden k como: $m_k = \frac{\sum X_i^k}{n}$.

Problemas

P1. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a.s. tales que $X_i \sim$ *Bernoulli* (p). Encuentre el estimador máximo verosimil $\hat{p}$ de p y calcule la distribución muestral para $\hat{p}$ para n fijo, y luego para n *grande*.

P2. Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de X, con $\mathbb{E}(X) = n$, $Var(X) = \sigma^2$. Sea además $S^2 = \dfrac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$.

a) Mostrar que $S^2 = \hat{\sigma}^2$ es insesgado.

b) Mostrar que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Considerar sólo el caso $n = 2$.

P3. Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de $X \sim exp(\alpha)$, y sea $\lambda = 1/\alpha$.
Sea $\hat{\lambda} = \bar{X}$. Encuentre $\mathbb{E}(\hat{\lambda}),\ Var(\hat{\lambda}),\ \text{y}\ ECM(\hat{\lambda})$.
Sea $M = \text{mín}\{X_i\}$. Muestre que $M \sim \exp(n\lambda)$, y que por lo tanto $\mathbb{E}(M) = 1/n\alpha = \frac{1}{n}\lambda,\ Var(M) = \frac{1}{n^2}\lambda^2$.
Defina luego $\hat{\hat{\lambda}} = nM$ y pruebe que es insesgado, ie, $\mathbb{E}(\hat{\hat{\lambda}}) = \lambda$, sin embargo, $Var(\hat{\hat{\lambda}}) = n^2 Var(M) = \lambda^2 \Rightarrow ECM(\hat{\hat{\lambda}}) = \lambda^2$

P4. Sea $X \sim G(r, \alpha)$, y $X_1, ..., X_n$ m.a.s.

(i) Muestre que el estimador de los momentos de α, para r conocido, es $\hat{\alpha} = \frac{r}{\bar{X}}$.

(ii) Muestre que el estimador de los momentos de $\lambda = 1/\alpha$, para r conocido, es $\hat{\lambda} = \frac{\bar{X}}{r}$.
Encuentre además la distribución muestral de $\hat{\lambda}$ para n grande.

(iii) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\alpha}$ para α.

P5. Muestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0\ \wedge\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(\hat{\theta}) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}$ es consistente.