

CONTROL 2

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA
PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIARES: JOSE CERECEDA & MARTIN CASTILLO
12 DE MAYO

P1. a) Sean X, Y v.a. con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \alpha\beta e^{-(\alpha x + \beta y)} & , 0 < x, y < \infty \\ 0 & , \sim \end{cases}$$

(i) Determine, usando Teorema de Cambio de Variable, la densidad de $Z = \frac{X}{Y}$.

Sol: Como tenemos que hacerlo usando TCV planteamos Z y W como sigue:

$$Z = \frac{X}{Y}, W = Y \iff X = Z \cdot W, Y = W.$$

Luego:

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(z \cdot w, w) \cdot \left| \begin{matrix} w & z \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| = \alpha \cdot \beta \cdot w \cdot e^{-w(\alpha z + \beta)}, \text{ con } 0 < z, w < \infty.$$

Finalmente:

$$f_Z(z) = \int_0^\infty f_{Z,W}(z,w) dw = \int_0^\infty \alpha\beta w e^{-w(\alpha z + \beta)} dw = \alpha\beta \left[\frac{w e^{-w(\alpha z + \beta)}}{-(\alpha z + \beta)} - \frac{e^{-w(\alpha z + \beta)}}{(\alpha z + \beta)^2} \right]_{w=0}^{w=\infty} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha z + \beta)^2}$$

(ii) Plantee las integrales que representan el valor de $\mathbb{P}(XY < 1 | X + Y > 2)$.

Sol: Primero hay que usar Probabilidades Condicionadas, entonces:

$$\mathbb{P}(XY < 1 | X + Y > 2) = \frac{\mathbb{P}(XY < 1 \wedge X + Y > 2)}{\mathbb{P}(X + Y > 2)}.$$

Y por otro lado:

$$\mathbb{P}(X + Y > 2) = \int_0^\infty \int_{2-x}^\infty f_{X,Y}(x,y) dy dx.$$

$$\mathbb{P}(XY < 1 \wedge X + Y > 2) = \int_0^\infty \int_{2-x}^{\frac{1}{x}} f_{X,Y}(x,y) dy dx.$$

b) Sean $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y N variables aleatorias tal que:

- $R_N = \mathbb{N}$.
- $\mathbb{E}(X_k) = \lambda \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{E}(N) \in \mathbb{R}_+$.
- X_k y N son independientes para todo $k \in \mathbb{N}$.

Calcule:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n \right).$$

Sol:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n | N \right) \right).$$

Calculemos:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n | N \right) = \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(X_n) = \lambda \cdot N.$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N X_n \right) = \mathbb{E}(\lambda \cdot N) = \lambda \mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1).$$

P2. a) Se dice que X tiene distribución *Weibull* de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} & , x > 0 \\ 0 & , \sim \end{cases}$$

(i) Determine la densidad de $Y = X^\beta$. **Sol:**

- Para esto calcularemos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X^\beta \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \sqrt[\beta]{y}) \\ &= \int_0^{\sqrt[\beta]{y}} f_X(x) \end{aligned}$$

$$\text{Luego, sabemos que } f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \int_0^{\sqrt[\beta]{y}} f_X(x)$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} \int_0^{\sqrt[\beta]{y}} f_X(x) \\ &= \alpha \beta y^{(\beta-1)/\beta} e^{-\alpha y} \frac{1}{\beta} y^{(1-\beta)/\beta} \\ &= \alpha e^{-\alpha y} \end{aligned}$$

(ii) Muestre que $\mathbb{E}(X) = k_1 \Gamma(k_2)$ determinando las constantes k_1 y k_2 .

Sol:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty x f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty \alpha \beta x^\beta e^{-\alpha x^\beta} dx \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $t = \alpha x^\beta$, $dt = \alpha \beta x^{\beta-1} dx$, nos queda la integral

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sqrt[\beta]{\alpha} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/\beta}} dt \\ &= \sqrt[\beta]{\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{-(1+1/\beta)} dt \\ &= \sqrt[\beta]{\alpha} \Gamma(1 + \beta) \end{aligned}$$

b) Sea $X \sim \exp(\alpha)$, $Y|X \sim U(0, X)$.

(i) Calcule $\mathbb{E}(Y)$.

Sol:

Podemos calcular

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}_X(\mathbb{E}_Y(Y|X))$$

$$\text{y se tiene que } \mathbb{E}(Y|X) = \int_0^X y \frac{1}{X} dy = \frac{X}{2} \text{ luego}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}_X(\mathbb{E}_Y(Y|X)) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(X) \\ &= \frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$

(ii) Determine $f_{X|Y}(x|y)$.

Sol:

$$\text{Se tiene que } f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}.$$

para calcular

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y) dx \\ &= \int_y^\infty f_{Y|X}(y|x)f_X(x) dx \\ &= \int_y^\infty \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{x} dx \end{aligned}$$

P3. a) Para modelar la cantidad X de productos defectuosos que se encuentran en una linea de producción se utiliza un modelo de dos parámetros llamado *Poisson con Ceros Forzados* (PCF). Decimos que X tiene distribución PCF si $X = YZ$ con Y, Z independientes tal que $Y \sim \text{Poisson}(p)$, $Z \sim B(1, p)$ (Bernoulli de parámetro p).

Así si la producción tiene una muy baja tasa de errores, entonces la probabilidad de que no hayan defectuosos es más alta que en un modelo *Poisson* tradicional.

(i) Calcule $\mathbb{P}(X = k)$ con $k \in R_X$.

Sol: Separamos en dos casos y usamos Probabilidades Totales:

$k = 0$:

$$\mathbb{P}(YZ = 0) = \mathbb{P}(YZ = 0|Z = 1)\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(YZ = 0|Z = 0)\mathbb{P}(Z = 0) = e^{-p}p + (1-p).$$

$k \neq 0$:

$$\mathbb{P}(YZ = k) = \mathbb{P}(YZ = k|Z = 1)\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(YZ = k|Z = 0)\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{e^{-p}p^{k+1}}{k!}.$$

(ii) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\text{Var}(X)$.

Sol: Usamos la independencia de Z e Y :

$$\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y) \cdot \mathbb{E}(Z) = p^2.$$

Por otro lado ocupando que $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(YZ) &= \mathbb{E}(Y^2Z^2) - \mathbb{E}(YZ)^2 = \mathbb{E}(Y^2) \cdot \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(YZ)^2 = \\ &= (\text{Var}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2) \cdot (\text{Var}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2) - \mathbb{E}(YZ)^2 = (p + p^2)(p(1-p) + p^2) - p^4 = p^2(1 + p - p^2). \end{aligned}$$

b) Sea Y v.a. tal que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2}$.

Se obtiene un valor de Y y luego se lanza una moneda perfecta tantas veces como el valor Y obtenido. Sea X la cantidad de caras obtenidas.

(i) Calcule $\mathbb{E}(X|Y = 1)$.

Sol:

$$\mathbb{E}(X|Y = 1) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Calcule $\mathbb{E}(Y|X = 1)$.

Sol:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y|X = 1) &= 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1|X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(Y = 2|X = 1) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = 1|Y = 1)\mathbb{P}(Y = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)} + 2 \cdot \frac{\mathbb{P}(X = 1|Y = 2)\mathbb{P}(Y = 2)}{\mathbb{P}(X = 1)}.\end{aligned}$$

Calculemos cada parte:

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1|Y = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1|Y = 2)\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\mathbb{E}(Y|X = 1) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$