Auxiliar 9

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martin Castillo & Jose Cereceda
15 de mayo de 2014

Resumen

Teorema central del límite (TCL)

Sean $X_1, ..., X_n$ v.a.'s *i.i.d.* Sean $\mu = \mathbb{E}(X_i)$, $\sigma^2 = Var(X_i)$ la esperanza y varianza respectivamente. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, entonces $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ y $Var(S_n) = n\sigma^2$, y:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n := \frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1) \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq t) = \Phi(t)$$

donde $\Phi(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ cuando $X \sim N(0,1)$, valor que se obtiene de la tabla.

Ley de los grandes números

La **ley débil de los grandes números** establece que si $X_1, X_2, X_3, ...$ es una sucesión infinita de v.a.'s *i.i.d.* de valor esperado μ y varianza σ^2, entonces el promedio

$$\overline{X_n} = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$$

converge en probabilidad a μ, esto es,

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) = 1$$

La **ley fuerte de los grandes números** establece que si $X_1, X_2, X_3, ...$ es una sucesión infinita de v.a.'s *i.i.d.* que cumplen $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$, y tiene valor esperado μ entonces, el promedio de las variables aleatorias converge a μ casi seguramente, esto es,

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} |\overline{X_n}| = \mu) = 1$$

Algunas distribuciones Importantes

- Normal $N(\mu, \sigma^2)$
  Sea $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se tiene

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Gamma $G(r, \alpha)$
  Sean $r, \alpha > 0$. Si $X \sim G(r, \alpha)$, se tiene

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^r x^{r-1} \cdot e^{-\alpha x}}{\Gamma(r)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

  donde

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx \quad r > 0$$

1. Problemas

1. Sea $X \sim N(0,1)$. Demuestre que $X^2 \sim G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. Pruebe usando el Teorema Central del Límite, que se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

3. Al sumar números un computador aproxima cada número al entero más próximo. Supongamos que todos los errores de aproximación son independientes y distruidos uniformemente en $(-0{,}5, 0{,}5)$.

   a) Si se suman 1500 números, ¿cuál es la probabilidad de que la magnitud del error total exceda 15?

   b) ¿Cuántos números pueden sumarse juntos a fin de que la magnitud del error total sea menor que 10, con probabilidad de 0.9?

4. Un tablero de dardos está formado por tres círculos concéntricos de radios R, $2R$, $3R$ respectivamente. El anillo mayor otorga 10 puntos, el siguiente 20, y el más pequeño 50 puntos.
   Si lanza un dardo al azar. Calcule el valor esperado y la varianza de su puntaje.
   Si ud. lanza 25 dardos, calcule la probabilidad de que su puntaje total supere los 400 puntos.

5. Suponga que $X \sim N(0, \sigma^2)$, e $Y \sim N(0, \delta^2)$ son los errores de medición de los instrumentos A y B tal que al medir un cuerpo con temperatura μ grados celsius:

   - A entrega $(\mu + X)$
   - B entrega $(\mu + \theta + Y)$

   Si $\sigma = 0{,}2$; $\delta = 0{,}15$; $\theta = 0{,}2$

   (i) Calcule la probabilidad de que al medir la temperatura de un cuerpo con los dos instrumentos, A entregue un valor mayor que B. ¿Qué interpretación tiene θ?

   (ii) Si con A se hacen n mediciones, determine n para que el resultado promedio difiera de μ en menos 0,1 con probabilidad 0,99.