

AUXILIAR 8: PRECONTROL

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIAR: JOSÉ CERECEDA - MARTIN CASTILLO

7 DE MAYO DE 2014

P1. Sea X v.a. con densidad $f_X(x) = Kx^{K-1}$, $0 < x < 1$.

a) Calcule $E(X)$, $Var(X)$.

b) Calcule $F_X(x)$.

Sea $Y = H(X) = F_X(X)$. Determine $f_Y(y)$.

c) Si K fuese una v.a. discreta con $P(K = k) = (\frac{1}{2})^k$, $k = 1, 2, \dots$ (por lo tanto la densidad inicial es condicional), calcule $P(X < a) \forall a$.

P2. Sea $X \sim \exp(\alpha)$, i.e., $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ $x > 0$. Muestre que:

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s) \quad \forall t, s > 0$$

Si X representa el tiempo de duración de un equipo, interprete la igualdad.

Muestre el converso, i.e. si f satisface la igualdad y $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X > h) - 1}{h} < \infty$, entonces sigue una distribución exponencial.

P3. Calcule la densidad de la v.a. $Z = \frac{X}{Y}$. Con $X, Y \sim U(0, 1)$.

P4. Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x/y} e^{-y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Calcule $E(X | Y = y)$.

[Propuesto]: Calcule $E(X) = E(E(X | Y = y))$

P5. Considere el experimento que consiste en lanzar n veces una moneda perfecta. Se denomina “run” a una secuencia “maximal” de caras consecutivas. Por ejemplo la secuencia *cssscscscscscs* tiene 5 run. Muestre que el número esperado de run es $\frac{1}{2} + \frac{n-1}{4}$.

P6. Sean

$$\begin{aligned} X_1 &\sim U(0, 1) \\ X_2 | X_1 &\sim U(X_1, 1) \\ &\vdots \\ X_n | X_{n-1} &\sim U(X_{n-1}, 1) \end{aligned}$$

Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 1$.

P7. Suponga que un fabricante produce cierto tipo de aceite lubricante que pierde alguno de sus atributos especiales si no se usa dentro de cierto periodo de tiempo. Sea X el número de unidades de aceite pedidas al fabricante durante cada año (Una unidad es igual a 1000 galones). $X \sim U(2, 4)$

Suponga que por cada una de las unidades vendidas se obtiene una utilidad de \$300, mientras que cada una de las unidades no vendidas (durante un años determinado) produce una pérdida de \$100, ya que una unidad no utilizada tendrá que ser descartada.

Considere $Z = H(X)$ la utilidad por año, y encuentre un Y para un valor esperado optimo de Z .