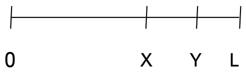
Pauta Auxiliar 5: V.A. N-DIMENSIONALES

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martín Castillo - José Cereceda
5 de mayo de 2014

Problemas.

P1. Considere una barra de largo L, realice un primer corte de forma uniforme, digamos en X, y haga un segundo corte una vez realizado este, digamos Y tal que $X < Y < L$ Se puede considerar entonces que $X \sim U(0, L)$, $Y|X \sim U(x, L)$. Encuentre la función de densidad de Y, ¿ Qué ocurre con $L \to 0$?

Sol: Podemos calcular la función $f_Y(y) = \int\limits_{\Omega_x} f_{x,y}(x, y)\,dx$. Y ademas se tiene que $f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$. Luego segun las condiciones del problema $0 \le X < Y \le L$ se tendrá que



$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int\limits_{\Omega_x} f_{x,y}(x, y)\,dx \\
&= \int_0^y \frac{1}{L - x} \cdot \frac{1}{L} dx \\
&= -\frac{1}{L} \log(L - x)|_0^y \\
&= \frac{1}{L}\{\log(L) - \log(L - y)\}
\end{aligned}
$$

Considerando lo anterior, tomando limite con $L \to 0$ se tendrá que

$$
f_Y(y) = \begin{cases} \infty & y = 0 \\ 0 & y \neq 0 \end{cases}
$$

pero si integramos la función densidad tendremos que

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}
$$

es decir que $f_Y(y) = \delta_0(y)$ con δ_0 la función conocida como delta de Dirac.

P2. Sean X, Y dos v.a. que distribuyen como una geométrica de parametro p.

a) Considere la v.a. $Z = X + Y$ y muestre que distribuye $Z \sim BN(p)$.
Sol:

Haciendo el siguiente calculo, utilizando el teorema de probabilidades totales, tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(Z=X+Y=k|Y=i)\cdot\mathbb{P}(Y=i)\\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=k-i)\cdot\mathbb{P}(Y=i)\\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-i-1}\cdot p\cdot(1-p)^{i-1}\cdot p\\
&= (k-2)(1-p)^{k-2}p^2
\end{aligned}
$$

b) Calcule $\mathbb{P}(X=j|X+Y=k)$.

Sol:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=j|X+Y=k) &= \mathbb{P}(X+Y=k|X=j)\,\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X+Y=k)}\\
&= \mathbb{P}(Y=k-j)\,\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X+Y=k)}\\
&= (1-p)^{k-j-1}\,p\frac{(1-p)^{j-1}\,p}{(k-2)(1-p)^{k-2}\,p^2}\\
&= \frac{1}{(k-2)}
\end{aligned}
$$

Propuesto: Considere $X\sim Poisson(\lambda_x)$ $Y\sim Poisson(\lambda_y)$ y encuentre la distribución de $Z=X+Y$.

P3. Sean $X_1,\dots,X_n$ v.a. independientes continuas con densidad $f_{X_i}=f_X\ \forall i$. Calcule la función densidad de las v.a. $Z_1=\max\{X_1,\dots,X_n\}, Z_2=\min\{X_1,\dots,X_n\}$

Sol:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_1\le z) &= \mathbb{P}(\max\{X_1,\dots,X_n\}\le z)\\
&= \mathbb{P}(X_1\le z, X_2\le z,\dots X_N\le z)\\
&= \mathbb{P}(X_1\le z)\,\mathbb{P}(X_2\le z)\cdots\mathbb{P}(X_N\le z)\\
&= \{F_X(z)\}^N
\end{aligned}
$$

Con $F_X(z)=\int\limits_{-\infty}^{z} f_X(x)\,dx$, luego

$$
\begin{aligned}
f_{Z_1}(z) &= \frac{d}{dz}\left(\{F_X(z)\}^N\right)\\
&= NF_X(z)^{N-1}\,\frac{d}{dz}\{F_X(z)\}\\
&= NF_X(z)^{N-1}\,f_X(z)
\end{aligned}
$$

de igual forma para Z_2

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z_2 \leq z\right) &= 1-\mathbb{P}\left(Z_2 \geq z\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_n\} \geq z\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(X_1 \geq z\right)\cdots\mathbb{P}\left(X_N \geq z\right) \\
&= 1-\{1-\mathbb{P}\left(X_1 \leq z\right)\}\cdots\{1-\mathbb{P}\left(X_N \leq z\right)\} \\
&= 1-\left(1-F_X\left(z\right)\right)^N
\end{aligned}$$

Luego $f_{Z_2}\left(z\right) = N\left(1-F_X(z)\right)^{N-1} f_x\left(z\right)$

P4. Calcule la densidad de la v.a. $Z = \dfrac{X}{Y}$. Con $X, Y \sim U(0,1)$.

P5. *Teorema de probabilidades totales, v.a. continuas y discretas*

a) Sea X v.a. con densidad $f_X\left(x\right)$. Y v.a. discreta tal que $\mathbb{P}\left(Y = y_j | X = x\right)$ es conocida. Mostrar conceptualmente que

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(Y = y_j | X = x\right) f_X(x)dx$$

Sol: Notar que a pesar de que no podemos condicionar con respecto a cada punto en la recta real, si podemos condicionar con respecto a los intervalos (partición) donde se encuentra la v.a., entonces considereando la partición de intervalos $(I_i)_{i\in\mathbb{Z}} = [x_i, x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = y_j) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(Y = y_j | X \in [x_i, x_{i+1})\right)\mathbb{P}\left(X \in [x_i, x_{i+1})\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(Y = y_j | X \in [x_i, x_{i+1})\right)\{F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i)\} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\left(Y = y_j | X \in [x_i, x_{i+1})\right)\frac{F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+1} - x_i)
\end{aligned}$$

Ahora si tomamor límite en la partición con $|I_i| \to 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\frac{F_X(x_{i+1})-F_X(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \to F_X'\left(x_{i+1}\right) = f_X\left(x_{i+1}\right)$, y la última igualdad coincide con la integral de Riemann, y se obtiene el resultado buscado.

$$\mathbb{P}(Y = y_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(Y = y_j | X = x\right) f_X(x)dx$$

b) Sea X v.a. discreta con probabilidad $\mathbb{P}\left(X = x_j\right)$. Y v.a. continua con densidad condicional $f_{Y|X}\left(y|x\right)$ conocida. Mostrar conceptualmente que

$$f_Y\left(y\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) f_{Y|x_i}\left(y|x_i\right)$$

Sol: De forma similiar que la anterior, consideramos $\mathbb{P}\left(Y \leq y\right)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y \leq y\right) &= \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}\left(Y \leq y | X = x_i\right) \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \\
\mathbb{P}\left(Y \leq y + h\right) &= \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}\left(Y \leq y + h | X = x_i\right) \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \\
\frac{F_Y\left(y+h\right) - F_Y(y)}{h} &= \sum_{i \geq 1} \frac{\mathbb{P}\left(Y \leq y + h | X = x_i\right) - \mathbb{P}\left(Y \leq y | X = x_i\right)}{h} \mathbb{P}\left(X = x_i\right)
\end{aligned}$$

Tomando límite en $h \to 0$ lo anterior converge (en algún sentido) a

$$f_Y\left(y\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) f_{Y|x_i}\left(y|x_i\right)$$