Pauta auxiliar 7: Esperanza

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martín Castillo & José Cereceda
4 de mayo de 2014

Resumen

Esperanza.
Sean X v.a, se define

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int x \cdot f_X(x)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedades.

(1) La esperanza es lineal.

(2) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$

(3) Si X v.a. y $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene entonces

$$\mathbb{E}(\Psi(X)) = \begin{cases} \sum_{i \in I} \Psi(x_i) \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int \Psi(x) \cdot f_X(x)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

(4) Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Esperanza Condicional. Sean X e Y dos variables aleatorias, se define la variables aleatoria (función de Y)

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \begin{cases} \sum_{i \in I} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i | Y = y) & \text{caso discreto} \\ \int x \cdot f_{X|Y}(x|y)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedad.

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$$

Problemas

P1. *[Control 2 02/2013]*

a) Sea $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ una sucesión de v.a. independientes tales que $X_i \sim Bin(1,p)\ \forall i$. Sea además $N \sim Poisson(\lambda)$ independiente de $X_i\ \forall i$.

(i) Calcule $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right) \quad \forall\ k$.

Solución:

Primero debemos recordar que si $X \sim Bin(n_1,p)$ e $Y \sim Bin(n_2,p)$, entonces $X+Y \sim Bin(n_1+n_2,p)$. Luego, para un n fijo, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p)$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right) &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k \;\middle|\; N=n\right)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k \;\middle|\; N=n\right)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n\geq k} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!} \underbrace{\sum_{n\geq k} \frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}}_{e^{\lambda(1-p)}} \\
&= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}
\end{aligned}$$

i.e., $\sum_{i=1}^{N} X_i \sim Poisson(\lambda p)$.

(ii) Determine, sin usar la parte (i), $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N} X_i)$.

Solución:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_i) = \lambda p$$

b) Sea $U \sim U(0,1)$ y X una v.a. aleatoria tal que $X|(U=p) \sim Bin(n,p)$. Encuentre la función densidad de X.

Indicación: Puede serle útil la identidad $\int_0^1 p^i(1-p)^{n-i} = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n) &= \int_0^1 \mathbb{P}(X = n \mid U = p) \cdot f_U(p) dp \\
&= \int_0^1 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} dp \\
&= \binom{n}{i} \int_0^1 p^i (1-p)^{n-i} dp \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

P2. *[Control 2 02/2012]*

a) Sea $X \sim B(n,p)$, $Y \sim BN(r,p)$, con la interpretación habitual de X e Y. Complete, **JUSTIFICANDO**, la igualdad

$$\mathbb{P}(X < \underset{\uparrow}{\bigcirc}) = \mathbb{P}(Y \underset{\uparrow}{\bigcirc}\underset{\uparrow}{\bigcirc})$$

Solución:
La igualdad es:

$$\mathbb{P}(X < r) = \mathbb{P}(Y > n)$$

El lado izquierdo representa la probabilidad de que en n intentos, haya menos de r éxitos. El lado derecho refleja una manera equivalente de ver este suceso: indica la probabilidad de que el r-ésimo éxito suceda después del n-ésimo intento. Es decir, si en n repeticiones, se obtienen menos de r éxitos, el r-ésimo éxito, sucede de manera posterior al n-ésimo intento, y viceversa.

b) Sea $X \sim$ Geometrica(p). Pruebe que $\mathbb{E}(X^{-1}) = -\dfrac{p \log p}{1-p}$.

Indicación: Recuerde que $\dfrac{a^i}{i} = \displaystyle\int_0^a x^{i-1}\, dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^{-1}) &= \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} p(1-p)^{k-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{k\geq 1} \frac{(1-p)^k}{k} = \frac{p}{1-p} \sum_{k\geq 1} \int_0^{1-p} x^{k-1} dx \\
&= \frac{p}{1-p} \int_0^{1-p} \sum_{k\geq 1} x^{k-1} dx = \frac{p}{1-p} \int_0^{1-p} \sum_{k\geq 0} x^k dx \\
&= \frac{p}{1-p} \int_0^{1-p} \frac{1}{1-x} dx = \frac{p}{1-p} [-ln(1-x)]_0^{1-p} \\
&= -\frac{p \log(p)}{1-p}
\end{aligned}$$

c) Sea X v.a. discreta con $R_X \subseteq \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades de X como $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$, es decir,

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k)$$

(i) Determine $\left.\frac{d^n G_X(z)}{dz^n}\right|_{z=0}$ $n = 0, 1, 2, \ldots.$
Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n G_X(z)}{dz^n} &= \frac{d^n}{dz^n}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dz^n} z^k \mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\frac{d^n}{dz^n} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)k(k-1)...(k-n+1)z^{k-n} \quad n \leq k,\ 0 \text{ en otro caso} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)k(k-1)...(k-n+1)z^{k-n} \\
&= \mathbb{P}(X=n)n! + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)k(k-1)...(k-n+1)z^{k-n}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left.\frac{d^n G_X(z)}{dz^n}\right|_{z=0} = \mathbb{P}(X=n)n!$$

(ii) Calcule $G_X(z)$ si $X \sim Poisson(\lambda)$.
Solución:
Sea $X \sim Poisson(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
G_X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}e^{\lambda z} \\
&= e^{-\lambda(1-z)}
\end{aligned}$$

P3. Considere el paseo aleatoria en dos dimensiones, es decir un jugador se ubica en el origen de la recta y da un paso al lado derecho con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad $(1-p)$. Calcule el lugar esperado donde se encontrara el jugador luego de N pasos.

Indicación: Puede serle útil definir la v.a. X_i tal que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \mathbb{P}(X_i = 1-p)$.

Solución:
Primero un calcularemos $\mathbb{E}(X_i)$ como esta definida en la indicación.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i) &= 1 \cdot \mathbb{P}(X_i = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X_i = -1) \\
&= p - (1-p) \\
&= 2p - 1
\end{aligned}$$

Basta considerar la v.a. $X = \sum_{i=1}^{N}$ que representa el lugar donde se encuentra el jugador luego de N pasos. Inicialmente no se sabe cual es la función de probabilidad de esta v.a. pero lo que deseamos calcular es la $\mathbb{E}(X)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N} X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (2p-1) \\
&= (2p-1)\, N
\end{aligned}$$