Auxiliar 7: Esperanza

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martín Castillo & José Cereceda
30 de abril de 2014

Resumen

Esperanza.
Sean X v.a, se define

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int x \cdot f_X(x) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedades.

(1) La esperanza es lineal.

(2) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$

(3) Si X v.a. y $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene entonces

$$\mathbb{E}(\Psi(X)) = \begin{cases} \sum_{i \in I} \Psi(x_i) \cdot p_i & \text{caso discreto} \\ \int \Psi(x) \cdot f_X(x) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

(4) Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Esperanza Condicional. Sean X e Y dos variables aleatorias, se define la variables aleatoria (función de Y)

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \begin{cases} \sum_{i \in I} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i | Y = y) & \text{caso discreto} \\ \int x \cdot f_{X|Y}(x|y) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Propiedad.

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$$

Problemas

P1. *[Control 2 02/2013]*

a) Sea $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ una sucesión de v.a. independientes tales que $X_i \sim Bin(1,p)\ \forall i$. Sea además $N \sim Poisson(\lambda)$ independiente de $X_i\ \forall i$.

(i) Calcule $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right) \quad \forall\ k$.

(ii) Determine, sin usar la parte (i), $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N} X_i)$.

b) Sea $U \sim U(0,1)$ y X una v.a. aleatoria tal que $X|(U = p) \sim Bin(n,p)$. Encuentre la función densidad de X.
Indicación: Puede serle útil la identidad $\int_0^1 p^i(1-p)^{n-i} = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}$.

P2. *[Control 2 02/2012]*

a) Sea $X \sim B(n,p)$, $Y \sim BN(r,p)$, con la interpretación habitual de X e Y. Complete, **JUSTIFICANDO**, la igualdad

$$\mathbb{P}(X < \underset{\uparrow}{\bigcirc}) = \mathbb{P}(Y \underset{\uparrow}{\bigcirc}\underset{\uparrow}{\bigcirc})$$

b) Sea $X \sim$ Geometrica(p). Pruebe que $\mathbb{E}(X^{-1}) = -\dfrac{p\log p}{1-p}$.

Indicación: Recuerde que $\dfrac{a^i}{i} = \displaystyle\int_0^a x^{i-1}\,dx$.

c) Sea X v.a. discreta con $R_X \subseteq \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades de X como $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$, es decir,

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k)$$

(i) Determine $\left.\frac{d^n G_X(z)}{dz^n}\right|_{z=0}$ $\quad n = 0, 1, 2, ...$

(ii) Calcule $G_X(z)$ si $X \sim Poisson(\lambda)$.

P3. Considere el paseo aleatoria en dos dimensiones, es decir un jugador se ubica en el origen de la recta y da un paso al lado derecho con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad $(1-p)$. Calcule el lugar esperado donde se encontrara el jugador luego de N pasos.

Indicación: Puede serle útil definir la v.a. X_i tal que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \mathbb{P}(X_i = 1-p)$.