

AUXILIAR 4

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA
PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIARES: JOSÉ CERECEDA & MARTIN CASTILLO
13 DE ABRIL DE 2014

Resumen

Función de Densidad. Sea X una variable aleatoria continua. Su función de densidad asociada, denotada f_X , es aquella tal que $F_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$.

Teorema de Cambio de Variables: Sea X una variable aleatoria continua. Sea $\varphi : X(\Omega) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable e inyectiva. Si $Y = \varphi(X)$ y la densidad de X es f_X , entonces:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X(\varphi^{-1}(y))$$

Problema

P3 Un experimento consiste en disparar una partícula desde el origen del plano cartesiano en un ángulo α respecto al eje de las abscisas. Suponiendo que el ángulo de disparo es una variable aleatoria que distribuye $\alpha \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se define una nueva variable aleatoria Y como la altura a la cual la partícula cruza la recta de ecuación $x = 1$. Determine la función de densidad de Y .

Sol:

Usando la notación del T.C.V., tenemos $X = \alpha$, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sim \end{cases}$,

$Y = \varphi(X) = \text{tg}(X)$.

Notemos ahora que en la fórmula del teorema, f_X está evaluada en $\varphi^{-1}(y)$, que en este caso corresponde a $\varphi^{-1}(y) = \text{arctg}(y)$. Luego:

$$f_X(\text{arctg}(y)) = \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \text{arctg}(y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}.$$

Además $\varphi'(x) = \sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$. Y

$$\sec^2(\text{arctg}(y)) = 1 + \tan^2(\text{arctg}(y)) = 1 + y^2.$$

$$\therefore f_Y(y) = \frac{1}{\underbrace{1 + y^2}_1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\pi}_{f_X(\varphi^{-1}(y))}} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$