Auxiliar 2: Probabilidad condicional e independencia

MA3403 - Probabilidades y Estadística
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Martin Castillo & José Cereceda
28 de Marzo, 2014

Resumen

Definición: Sean A, B eventos tales que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilidad de A condicionado por B se define por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propiedades: A continuación, las más relevantes:

1. **Fórmula de Bayes:** Dados A, B eventos, se tiene que:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

2. **Probabilidades Totales:** Sea Ω un espacio muestral y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ partición de Ω, entonces:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

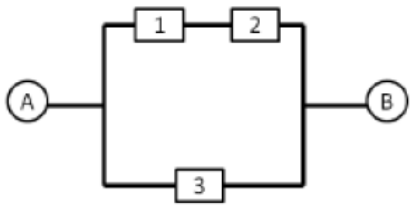
3. **Multiplicación de Probabilidades:** Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos, entonces:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}(A_i|A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}) = \mathbb{P}(A_n)\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i|A_{i+1} \cap \cdots \cap A_n)$$

Definición: Diremos que dos eventos A y B son independientes si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Problemas

P1. Considere que en el circuito de la figura las componentes 1, 2 y 3 tienen una probabilidad p de funcionar, es decir, $1 - p$ de fallar, y lo hacen de forma independientes.



a) Calcule la probabilidad de que no exista flujo de A a B.

b) Calcule la probabilidad de que 1 esté bueno, sabiendo que hay flujo.

P2. Un estudio entrega la siguiente información con respecto al actuar de los tribunales de justicia: cuando el acusado es culpable el tribunal lo declara culpable con probabilidad 0.7, inocente con probabilidad 0.2 y se declara incompetente con probabilidad 0.1. Cuando el acusado es inocente las probabilidades cambian a 0.1, 0.8 y 0.1 respectivamente. En el caso de incompetencia se pasa a un tribunal superior que actúa como el primero pero con probabilidades 0.8, 0.2, 0 y 0.5, 0.5, 0 respectivamente. Se sabe que el 60 % de los acusados es culpable.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo culpable sea declarado culpable y que un inocente sea declarado inocente.

b) Calcule la probabilidad de que un individuo declarado culpable lo sea realmente.

c) Consideremos las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}\text{Error de tipo I} &= \text{declarar culpable a un inocente}\\ \text{Error de tipo II} &= \text{declarar inocente a un culpable}\end{aligned}$$

Determine el porcentaje de error de cada tipo.

P3. Suponga que tiene n urnas $(U_1, \ldots, U_n)$, cada una con a bolitas blancas y b bolitas negras. Suponga el siguiente experimento: Tomar una bolita al azar (todas las bolitas son equiprobables de ser elegidas) de la urna U_1 y depositarla en la urna U_2. Hacer este mismo procedimiento para $U_2, U_3, \ldots U_{n-1}$. ¿Cual es la probabilidad de sacar una bolita blanca de la urna U_n dado que en el procedimiento anterior la primera bolita elegida fue blanca? ¿que sucede cuando tenemos muchas urnas $(n \to \infty)$?

Propuesto: Un fugitivo se encuentra en una de n zonas (no conectadas entre sí). La probabilidad de que se encuentre en la i-ésima zona es p_i, y si está ahí y se le busca, se le encuentra con probabilidad α_i.

a) Si se hace una búsqueda en todas las zonas:

(i) Determine la probabilidad de encontrarlo.

(ii) Si no se le encuentra, calcule la probabilidad que esté en la zona 1.
¿Qué pasa con los eventos anteriores si $\alpha_i = \alpha \ \forall i$?

b) Se buscó en la zona j y no se encontró; calcule la probabilidad que esté en la zona $i, \forall i, j$.