

AUXILIAR 1

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA
PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIAR: JOSÉ CERECEDA - MARTÍN CASTILLO
21 DE MARZO DE 2014

Resumen

Análisis Combinatorio.

Principio del Multiplicación. Si un hecho puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si una vez realizado éste se sabe que otro hecho puede realizarse de n_2 maneras diferentes, entonces el número de maneras diferentes que puede realizarse ambos a la vez, en este orden, es $n_1 \cdot n_2$ maneras diferentes. En general

$$N_{total} = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

Permutaciones (Variaciones) Simples. Son las diferentes ordenaciones que pueden hacerse con n elementos distinguibles, de tamaño r , donde los objetos se pueden usar sólo una vez.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Obs: Usualmente se le llama permutación al caso especial $r = n$ donde:

$$P_n = n!$$

Permutaciones con elementos repetidos. Si se tienen n elementos divididos en k grupos, con n_i : cant. de objetos tipo i , tq $\sum_{i=1}^k n_i = n$. El total de permutaciones posibles es:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

Combinaciones. Dada una agrupación de n elementos, la cantidad de subconjuntos de k elementos de dicha agrupación está dada por:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Obs: El número total de subconjuntos no vacíos que se pueden formar es: $2^n - 1$

Combinaciones con repetición. La cantidad de formas de escoger un conjunto de k elementos dentro de un total de n con repetición está dada por:

$$C_k^{n-1+k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Axiomática de Probabilidades

Axiomas

(A1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(A3) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia disjunta de eventos. Entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

(1) σ -Subaditividad.

Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de eventos. Entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

(2) Aditividad.

Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de eventos disjuntos. Entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

(3) Monotonía.

Sean A, B eventos. Si $A \subseteq B$, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(4) Subaditividad.

Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de eventos. Entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

(5) Propiedad del Complemento.

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

(6) Propiedad de la Unión.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Generalización:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i,j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

Problemas

P1. Un librero tiene 5 libros en alemán, 7 libros en español y 8 libros en francés. Cada libro es distinto al resto.

- a) ¿Cuántos posibles arreglos hay de estos libros?
- b) ¿Cuántos posibles arreglos hay de estos libros si los libros deben estar agrupados por lengua?

P2. Una caja contiene esferas numeradas 1, 2, ..., n . Se escogen dos esferas al azar. Encontrar la probabilidad de que los números sobre las esferas sean enteros consecutivos si:

- a) las esferas se escogen sin reposición.
- b) las esferas se escogen con reposición.

P3. Se toman tres enteros diferentes del conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, 20\}$. ¿De cuántas formas se pueden escoger de manera que su suma sea divisible por 3?

P4. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto con n elementos. Demuestre que la cantidad de subconjuntos posibles de $\mathcal{A}$ es 2^n usando:

- Principio multiplicativo.
- Argumentos combinatoriales.

P5. Demostrar que

$$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

P6. Pruebe la siguiente identidad conocida como la identidad combinatorial de Fermat

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{i-1}{k-1}$$

Himt: Considere el conjunto de numeros de 1 hasta n . ¿ Cuantos subconjuntos de tamaño k tienen a i como su número másaltode dicho subconjunto.

P7. Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\mathbb{P}(A_n) = 0$. Muestre que $\bigcup A_n$ tiene probabilidad cero. Considere $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\mathbb{P}(B_n) = 1$ Muestre que $\bigcap B_n$ tiene probabilidad uno.

P8. Considere el experimento de lanzar 4 dados equiprobables. Calcule las siguientes probabilidades.

- a) $\mathbb{P}(\text{salgan todos iguales})$.
- b) $\mathbb{P}(\text{salga un par})$.
- c) $\mathbb{P}(\text{salgan dos pares})$.
- d) $\mathbb{P}(\text{salga un trio})$.
- e) $\mathbb{P}(\text{todos los dados sean distintos})$.