

AUXILIAR 10:

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA
PROFESOR: VICENTE ACUÑA
AUXILIAR: MARTÍN CASTILLO - FELIPE CAMPOS
30 DE MAYO

Resumen

Teorema central del límite (TCL)

Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s *i.i.d.* Sean $\mu = \mathbb{E}(X_i)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ la esperanza y varianza respectivamente. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, entonces $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ y $\text{Var}(S_n) = n\sigma^2$, y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n := \frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1) \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \leq t) = \Phi(t)$$

donde $\Phi(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ cuando $X \sim N(0, 1)$, valor que se obtiene de la tabla.

Ley de los grandes números

La **ley débil de los grandes números** establece que si $X_1, X_2, X_3, \dots$ es una sucesión infinita de v.a.'s *i.i.d.* de valor esperado μ y varianza σ^2 , entonces el promedio

$$\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$$

converge en probabilidad a μ , esto es,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

La **ley fuerte de los grandes números** establece que si $X_1, X_2, X_3, \dots$ es una sucesión infinita de v.a.'s *i.i.d.* que cumplen $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$, y tiene valor esperado μ entonces, el promedio de las variables aleatorias converge a μ casi seguramente, esto es,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |\overline{X}_n| = \mu\right) = 1$$

1. Problemas

1. Pruebe usando el Teorema Central del Límite, que se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

2. Al sumar números un computador aproxima cada número al entero más próximo. Supongamos que todos los errores de aproximación son independientes y distribuidos uniformemente en $(-0,5, 0,5)$.

- a) Si se suman 1500 números, ¿cuál es la probabilidad de que la magnitud del error total exceda 15?

- b) ¿Cuántos números pueden sumarse juntos a fin de que la magnitud del error total sea menor que 10, con probabilidad de 0.9?
3. Un tablero de dardos está formado por tres círculos concéntricos de radios R , $2R$, $3R$ respectivamente. El anillo mayor otorga 10 puntos, el siguiente 20, y el más pequeño 50 puntos.
Si lanza un dardo al azar. Calcule el valor esperado y la varianza de su puntaje.
Si ud. lanza 25 dardos, calcule la probabilidad de que su puntaje total supere los 400 puntos.
4. Suponga que $X \sim N(0, \sigma^2)$, e $Y \sim N(0, \delta^2)$ son los errores de medición de los instrumentos A y B tal que al medir un cuerpo con temperatura μ grados celsius:
- A entrega $(\mu + X)$
 - B entrega $(\mu + \theta + Y)$
- Si $\sigma = 0,2$; $\delta = 0,15$; $\theta = 0,2$
- (i) Calcule la probabilidad de que al medir la temperatura de un cuerpo con los dos instrumentos, A entregue un valor mayor que B . ¿Qué interpretación tiene θ ?
- (ii) Si con A se hacen n mediciones, determine n para que el resultado promedio difiera de μ en menos 0,1 con probabilidad 0,99.