Auxiliar 8:

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Vicente Acuña
Auxiliar: Martín Castillo - Felipe Campos
9 de Mayo

Problemas

P1. Un experimento consiste en disparar una partícula desde el origen del plano cartesiano en un ángulo α respecto al eje de las abscisas. Suponiendo que el ángulo de disparo es una variable aleatoria que distribuye $\alpha \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se define una nueva variable aleatoria Y como la altura a la cual la partícula cruza la recta de ecuación $x = 1$.

a) Determine R_Y.

b) Determine la función de densidad de Y.

c) Determine la función de densidad acumulada de Y.

d) Muestre que $\mathbb{E}(Y)$ no existe.

P2. Considere una colonia de bacterias con población inicial n_0 . En cada generación la cantidad de bacterias puede multiplicarse por $\lambda > 1$, con probabilidad p, o dividirse por λ con probabilidad $1-p$. La multiplicación o división de la población ocurre de manera independiente en cada período. Considere la variable aleatoria X_n , que mide la población de bacterias en la generación n.

a) Pruebe que $R_{X_n} = \{\lambda^k n_0\}_{k=-n}^{n}$. Es decir, $X_n = \lambda^{U_n} n_0$, donde U_n es una variable aleatoria discreta que toma valores enteros entre $-n$ y n.
Defina las variables aleatorias R_n :"Cantidad de veces que la población se multiplicó" y L_n : "Cantidad de veces que la población se dividió". Notar que $R_n + L_n = n$.

b) Encuentre la función de distribución puntual de R_n y de L_n y exprese U_n en términos de R_n.

c) Muestre que se cumple lo siguiente:

$$U_n = 2R_n - n.$$

d) Calcule $\mathbb{P}(U_n = k)$.

e) Encuentre la función distribución puntual de X_n.

f) Calcule $\mathbb{E}(X_n)$.

P3. Sea $X \sim$ Geometrica(p). Pruebe que $\mathbb{E}(X^{-1}) = -\dfrac{p \log p}{1-p}$.

Indicación: Recuerde que $\dfrac{a^i}{i} = \displaystyle\int_0^a x^{i-1}\, dx$.