Auxiliar 6: Variables Aleatorias Discretas, función de Probabilidad Puntual y Esperanza

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Vicente Acuña
Auxiliar: Martín Castillo - Felipe Campos
23 de abril de 2014

Resumen

Variable Aleatoria. X se dice variable aleatoria, si $X : \Omega \to \mathbb{R}$
X se dice discreta si su imagen es un conjunto numerable.

Función de Probabilidad. Sea X una variable aleatoria discreta. Su distribución de probabilidad puntual asociada es:

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$$

Esperanza.
Sea X v.a discreta, se define

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i$$

Propiedades.

(1) Si $X = \alpha$, entonces $\mathbb{E}(X) = \alpha$

(2) Si X, Y son variables aleatorias, entonces $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$

(3) Si $X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$

(4) Si X v.a. discreta y $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene entonces

$$\mathbb{E}(\Psi(X)) = \textstyle\sum_{i \in I} \Psi(x_i) \cdot p_i$$

(5) Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Problemas

P1. Suponga que para elegir un número entero mayor que uno y usted lo elige bajo el siguiente experimento:

- Parte en 1.
- Con probabilidad $\frac{1}{2}$ se queda donde esta y con probabilidad $\frac{1}{2}$ avanza una unidad.
- Vuelve a la instrucción anterior.

Sea X el número que con el cual se queda después del procedimiento anterior. Y sea:

$$f : \mathbb{N} \to \{1, -1\},$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, x es par} \\ -1 & \text{, x es impar} \end{cases}$$

a) Encuentre la distribución de probabilidad puntual de X.

b) Calcule la distribución de probabilidad puntual de $Y = f(X)$.

c) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(Y)$.

P2. Calcule la esperanza de las siguientes variables:

- $X \sim Binom(n, p)$.
- $X \sim Poisson(\lambda)$.

P3. Se sabe que cierto virus se ha esparcido por los sistemas de aire acondicionado de los aviones. Se sabe que mientras más se haya esparcido el virus, mas improbable es cada persona expuesta al virus lo haya contraído. Se estima que si n es el total de personas expuestas al aire acondicionado con virus, entonces cada persona lo contrae con probabilidad $\frac{p}{n}$, con $p \in [0, 1]$, independiente de las demás.
Definimos X_n v.a. que representa el número de personas que contrajeron el virus, dado que n personas fueron expuestas.

a) Explique (no es necesario demostrar) porque se debería cumplir que $X_n \sim Binom(n, \frac{p}{n})$.

b) Calcule, en función de n, el número esperado de personas contagiadas.
Suponga de aquí en adelante que el virus se ha esparcido por el sistema de aire acondicionado de todos los aviones del mundo ($n \longrightarrow \infty$).

c) Calcule la probabilidad de que k personas se hayan contagiado. Para esto calcule:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = k).$$

d) Con lo anterior justifique: $X = \lim_{n \to \infty} X_n \sim Poisson(p)$.

e) ¿Cual es el número esperado de personas contagiadas aproximadamente?.

Propuesto: Se lanza un dado equilibrado con n caras numeradas de 1 a n, y se anota el resultado obtenido. Se continúa lanzando el dado hasta que se obtiene un resultado que haya sido anotado previamente. Sea X la v.a. que denota la cantidad total de lanzamientos. ¿Qué valores puede tomar la variable X? Calule su función de probabilidad puntual.