Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
26 de mayo

Auxiliar 5 MA2601-5

Profesora: Karina Vilches
Auxiliares: Francisca Jiménez y
Francisco Fernández (fcojose24@gmail.com)

P1. Calcule e^{tA} con $A =$:

a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

P2. Resuelva:
$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

P3. Sea el siguiente sistema a coeficientes variables:
$$X\'(t) = A(t)X(t)$$

Donde $A(t)$ es periódica de periodo π. Sea $\phi(t)$ la matriz canónica del sistema.

a) Demuestre $\phi(t+\pi) = \phi(t)\phi(\pi)\ \forall t \in \mathbb{R}$

b) Suponga que $\phi(\pi)$ tiene valor propio $\lambda = 1$. Muestre que el sistema tiene solución de periodo π.

P4. Sea la ecuación:
$$X(t) = 1 + \int_t^\infty (t-s)X(s)\phi(s)ds$$

con ϕ tal que $\exists C \in \mathbb{R}$, $Sup_{t\geq 0} |e^t\phi(t)| \leq C$.
$$C_b = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R}/f \textit{ continua y acotada}\}$$

a) Encuentre un operador $T : C_b \to C_b$ cuyos puntos fijos correspondan a las soluciones de la ecuación. Muestre que el operador tiene como recorrido C_b.

b) Determine el valor de C tal que T es contractante. Con dicho C muestre que la ecuación posee solución única.

c) Demuestre que T es de clase C^2 y encuentre la ecuación diferencial que $X(t)$ satisface.

P5. Sean X_1 y X_2 soluciones de $X'(t) = AX(t)$ con A Antisimétrica ($A^T = -A$).
Pruebe que si $X_1(0) \perp X_2(0)$ entonces $X_1(t) \perp X_2(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.