Universidad de Chile - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Sección 2 - Semestre 2012-2.
Apunte de Clases: Solución de Ecuaciones de Variables Separables.

1. Existencia de la Solución.

Vamos a considerar un problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} y'(x) &= g(x)h(y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

donde g y h son funciones continuas y $x_0 \in Dom(g)$, $y_0 \in Dom(h)$. Si $h(y_0) = 0$ (es decir, y_0 es un cero de la función h), entonces es fácil ver que la función constante $y(x) = y_0$ es solución del problema (1.1). Por lo tanto, vamos a asumir que $h(y_0) \neq 0$ y con ello, por la continuidad de h, existe un intervalo donde h no se anula. Es más, en tal intervalo podemos asumir que h tiene signo (es estrictamente positiva o estrictamente negativa).

En lo que viene, nuestro interés será encontrar rigurosamente una solución del problema (1.1). Si tal solución existe, entonces necesariemente debiese ser continua (por que debiese ser derivable), por lo tanto, la función

$$x \mapsto h(y(x))$$

es continua. Como se sabe que

$$h(y(x_0)) = h(y_0) \neq 0$$

entonces, tal como argumentamos antes, la composición $h \circ y$ es no nula en un intervalo alrededor de x_0, digamos $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$.

Bajo todos los supuestos anteriores, la ecuación puede escribirse equivalentemente como

$$\frac{1}{h(y(x))} y'(x) = g(x) \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Integrando con respecto a x entre x_0 y x en el intervalo, se tiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx = \int_{x_0}^{x} g(x) dx$$

Realizando el cambio de variables $u = y(x)$ se tiene

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{h(u)} du = \int_{x_0}^{x} g(x) dx$$

y si denominamos H a una primitiva de h^{-1} (que existe, pues h^{-1} es continua y por lo tanto integrable) y G a una primitiva de g (que también existe por las mismas razones), se tiene que

$$H(y(x)) - H(y_0) = G(x) - G(x_0)$$

Recordemos que h tiene signo en un intervalo cerca de y_0: Si $h > 0$ en tal intervalo, entonces

$$H' = h^{-1} > 0$$

es decir, H es estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva en el intervalo en cuestión. Luego, invertible. Un argumento análogo cuando h es negativa permite invertir H para concluir que la función definida como

$$y(x) = H^{-1}(G(x) - G(x_0) + H(y_0)) \tag{1.2}$$

es una solución del problema (1.1). En efecto, la función y así definida es tal que

(1) Es derivable, pues H^{-1} y G lo son. Por composición de funciones derivables, y es derivable.

(2) Satisface la condición incial:

$$y(x_0) = H^{-1}(G(x_0) - G(x_0) + H(y_0)) = H^{-1}(H(y_0)) = y_0.$$

(3) Satisface la EDO:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (H^{-1})'(G(x) - G(x_0) + H(y_0))G'(x) \\ &= \frac{1}{H'(H^{-1}(G(x) - G(x_0) + H(y_0)))}G'(x) \\ &= h(H^{-1}(G(x) - G(x_0) + H(y_0)))g(x) \\ &= h(y(x))g(x) \end{aligned}$$

2. Observaciones Importantes.

(i) Note que la solución y encontrada, en principio, está definida en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Una pregunta interesante trata acerca de si este intervalo de definición es el máximo al que podemos aspirar. Tal como se vé en la fórmula (1.2), si en un ejercicio concreto tenemos conocemos explícitamente H^{-1} y G entonces podemos ver si el intervalo de definición se puede extender, observando dónde la expresión en (1.2) se indefine o deja de ser derivable.

(ii) La solución encontrada, al menos en el itervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ es única, pues cualquier otra solución definida en el intervalo en cuestión debiese permitir los pasos que nos llevaron a (1.2).

Universidad de Chile - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Sección 2 - Semestre 2012-2.
Apunte de Clase 2: Teorema de Existencia y Unicidad.
Prof. Erwin Topp; Aux. José Cereceda.

En este apunte mostraremos una parte de la demostración del teorema de existencia y unicidad.

El Teorema se puede enunciar de la siguiente manera:

Theorem 0.1. (Teorema de Existencia y Unicidad Local.) *Considere la EDO dada por:*

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{0.1}$$

donde f es una función continua y Lipschitz en la segunda variable sobre un conjunto

$$\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - r, y_0 + r] \subset \mathbb{R}^2; \qquad a, r > 0.$$

Entonces, la ecuación (0.1) ***tiene solución única*** *definida sobre el intervalo $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, donde $\alpha = \min\{a, \frac{r}{M}\} > 0$; y*

$$M = \max\{|f(x,y)| : \ (x,y) \in \Omega\}.$$

La demostración completa es bastante elaborada y extensa, por lo tanto el presente apunte busca entregar sólo una idea de la demostración, en especial para que se entienda el uso e importancia de la hipótesis de Lipschitzianidad de la función f en la segunda variable.

Idea de la Demostración: La demostración pasa por considerar una sucesión de funciones cuyo límite (en un sentido que precisaremos) es solución de la ecuación (0.1). Primero, notemos que una solución de la *ecuación diferencial* (0.1) es exactamente una solución continua de la *ecuación integral*:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{0.2}$$

Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, una solución continua de (0.2) es exactamente una solución de (0.1). Por lo tanto, y es una solución de (0.1) si y sólo si y es una solución continua de (0.2). Es por esto que la mencionada sucesión de funciones basta encontrarla a través de la ecuación (0.2).

La sucesión que tomaremos está dada por la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 \text{ (solución constante que pasa por } y_0\text{)},\\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt,\\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt,\\
&\vdots\\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt,
\end{aligned}$$

Nota: La elección de esta sucesión se justifica pues, en algunos casos en que $f(x, y)$ es simple y una solución explícita de la ecuación se puede calcular, el método entrega una sucesión de funciones que se aproxima bastante a la solución calculada.

Por la propiedad telescópica de la sumatoria, se tiene que

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k(x) - y_{k-1}(x)).$$

Por lo tanto, estudiar la convergencia de la sucesión de funciones $(y_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ equivale al estudio de la convergencia de la serie

$$(0.3) \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}(y_k(x) - y_{k-1}(x)), \qquad \text{(es como tomar } n \to +\infty\text{)}$$

Aplicando módulo, se tiene que

$$\Big|\sum_{k=1}^{+\infty}(y_k(x)-y_{k-1}(x))\Big| \leq |y_1(x)-y_0|+|y_2(x)-y_1(x)|+|y_3(x)-y_2(x)|+...+|y_n(x)-y_{n-1}(x)|+...$$

La idea es estimar cada uno de los sumandos de la serie. Antes que esto, recordemos lo que tenemos: Según las hipótesis, se tiene la existencia de constantes $K > 0$ y $M > 0$ tales que

(0.4)

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \quad \forall\ (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega, \text{ (condición Lipschitz)}$$

$$(0.5) \qquad |f(x, y)| \leq M, \quad \forall\ (x, y) \in \Omega \text{ (Por Weierstrass).}$$

Imponiendo, como lo dice el enunciado del teorema, que $\alpha = \min\{a, \frac{r}{M}\}$, se tiene que

- $\alpha \leq a$ (es decir, el intervalo $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subset (x_0 - a, x_0 + a)$).
- $M\alpha < r$.

Con esta disposición de α se puede demostrar la siguiente afirmación:
Afirmación: $y_n(x) \in (y_0 - r, y_0 + r)$ cuando $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$

Es decir, las funciones que entrega la sucesión propuesta no salen de $[y_0 - r, y_0 + r]$ y por lo tanto los pares $(x, y_n(x))$ no salen del rectángulo Ω cuando $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Esto nos permitirá usar las propiedades (0.4) y (0.5) con la sucesión de funciones $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Veamos la justificación de la afirmación. De la definición de la sucesión:

$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t, y_0(t))|}_{\leq M} dt \leq M \underbrace{|x - x_0|}_{\leq \alpha} \leq M\alpha \leq r.$$

es decir, $y_1(x) \in (y_0 - r, y_0 + r)$ cuando $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$.

De la misma manera, usando que $y_1(x) \in (y_0 - r, y_0 + r)$, se tiene:

$$|y_2(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t, y_1(t))|}_{\leq M} dt \leq M \underbrace{|x - x_0|}_{\leq \alpha} \leq M\alpha \leq r.$$

Y así sucesivamente, se demuestra de la misma manera que

$$|y_n(x) - y_0| \leq r, \quad \forall\ x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha).$$

es decir, $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha), (x, y_n(x)) \in \Omega$, con lo que se demuestra la afirmación.

Ahora estamos en condiciones de demostrar que la serie (0.3) es convergente. Para esto, acotaremos el término general de la serie. Supongamos que $x_0 < x$ (el caso $x < x_0$ es análogo). Gracias a la afirmación, se justifica el uso de la condición Lipschitz cuando corresponde en las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
|y_1(x)-y_0(x)| &\leq r,\\
|y_2(x)-y_1(x)| &\leq \int\limits_{x_0}^{x} |f(t,y_1(t))-f(t,y_0(t))|dt\\
&\leq \int\limits_{x_0}^{x} K|y_1(t)-y_0(t)|dt \leq Kr(x-x_0),\\
|y_3(x)-y_2(x)| &\leq \int\limits_{x_0}^{x} |f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t))|dt\\
&\leq \int\limits_{x_0}^{x} K|y_2(t)-y_1(t)|dt \leq K^2 r\int\limits_{x_0}^{x}(t-x_0)dt \leq \frac{1}{2}K^2 r(x-x_0)^2,\\
|y_4(x)-y_3(x)| &\leq \int\limits_{x_0}^{x} |f(t,y_3(t))-f(t,y_2(t))|dt\\
&\leq \int\limits_{x_0}^{x} K|y_3(t)-y_2(t)|dt \leq \frac{1}{2}K^3 r\int\limits_{x_0}^{x}(t-x_0)^2dt \leq \frac{1}{6}K^3 r(x-x_0)^3.
\end{aligned}$$

donde en cada acotamiento también se usa el acotamiento que se encontró previamente, y, obviamente, la definición de la sucesión $(y_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. De esta manera, inductivamente se concluye que

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{(n-1)!}K^{n-1}r(x-x_0)^{n-1}.$$

Como $|x-x_0|\leq\alpha$, se tiene que para cada $n\in\mathbb{N}$ se cumple

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{(n-1)!}(K\alpha)^{n-1}r.$$

Es decir:

$$\Big|\sum_{k=1}^{+\infty}(y_k(x)-y_{k-1}(x))\Big| \leq r\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(K\alpha)^n}{n!} = re^{K\alpha} < +\infty,$$

donde hemos usado la serie de Taylor de la exponencial.

Luego, la serie (0.3) converge. Por lo tanto, $(y_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función límite $y(x)$ dada por la serie, cuando $x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$.

Esta es una parte de la demostración donde se usa la Lipschitzianidad y continuidad de la función f, y su consecuencia es que existe la función límite de la sucesión definida al principio.

Lo que resta por demostrar es:

- La convergencia es *uniforme en x*, en el sentido que

$$\sup\{|y_n(x) - y(x)| : x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\} \to 0, \quad \text{cuando } n \to +\infty.$$

  Esto asegura que y es continua. Acá también se usa la Lipschitzianidad y continuidad de f.
- $y(x)$ es solución de la ecuación (0.2). Como vimos al principio, esto implica que y es solución de la ecuación (0.1).
- La solución es única.

Los detalles de estos tres puntos pueden encontrarse en el libro de *Ecuaciones Diferenciales de George F. Simmons*, páginas 481-484. También es posible ver demostraciones alternativas en el libro *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional de L. Elsgoltz*, página 41.

1. Un ejemplo de que la condición no es necesaria.

Para finalizar, un ejemplo que nos recuerda que en general, **la recíproca del teorema no se tiene**: Es decir, puede que una ecuación de la forma (0.1) tenga solución única sin que la condición Lipschitz se cumpla.

Ej. Considere la *EDO*

$$\begin{cases} y' &= y^{1/2} + y^2, \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Usando el TVM, se puede probar que la función $f(x, y)$ no es Lipschits en ningún conjunto que contenga al $(0, 0)$.

Notemos que una solucion de (1.1) es la solución constante $y(x) = 0$. Demostraremos que esta solución es la única. Supongamos que no y existe ϕ que cumple (1.1). Obviamente, $\phi(x) \geq 0$ para todo x, pues de lo contrario la raíz no queda bien definida. Pensemos entonces que es estrictamente positiva positiva a partir de algún momento. Notemos que:

$$\phi'(x) = \phi(x)^{1/2} + \phi(x)^2 \geq \phi(x)^2 \geq 0$$

por lo tanto, la solución ϕ es creciente. Por otro lado, como suponemos que ϕ no es idénticamente cero, entonces existe x_0 tal que $\phi(x_0) > 0$. Por lo tanto, para todo $x > x_0$, $\phi(x) > 0$, ya que ϕ es creciente. Luego, como

$$\phi'(x) \geq \phi(x)^2$$

al integrar entre x_0 y x obtenemos que

$$\frac{1}{\phi(x_0)} - \frac{1}{\phi(x)} \geq x - x_0.$$

pero si en la última expresión hacemos $x \to +\infty$, el lado derecho tiende a infinito, mientras que el izquierdo está acotado pues al ser ϕ creciente, el denominador en $1/\phi(x)$ no se anula nunca y está lejos de cero. Esto es una contradicción del tipo

$$\textit{acotado} \geq +\infty.$$

Universidad de Chile - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Sección 2 - Semestre 2012-2.
Apunte de Clase 3: Resumen Capítulo II.
Prof. Erwin Topp; Aux. José Cereceda.

Nos concentraremos por el momento en ecuaciones de orden 2 lineales, que tienen la forma

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R} \tag{0.1}$$

donde $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ son continuas. Este tipo de ecuaciones tienen su principal motivación en la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

donde $a(t)$ es la aceleración de cierto cuerpo en tiempo t. Si $y(t)$ es la trayectoria del cuerpo, entonces se tiene que $a(t) = y''(t)$ y con ello la segunda ley queda

$$F = my''.$$

La ecuación dependerá entonces de la forma de la fuerza F que estemos considerando. Por ejemplo, en la Ley de los resortes de Hooke, $F = -ky$ (donde $k > 0$ es la constante de restitución del resorte) dá paso a una EDO de la forma

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0.$$

0.1. **Condiciones sobre la EDO.** Estudiaremos dos tipos de condiciones

Problema con Condición Inicial: Es un problema de la forma (0.1) sujeto a la *condición incial*

$$y(t_0) = a, y'(t_0) = b$$

con $t_0 \in I$, $a, b \in \mathbb{R}$. Para este tipo de problemas hay Teorema de exitencia y unicidad.

Problema con Condición de Borde Es un problema de la forma (0.1) sujeto a la *condición de frontera (o contorno o borde)*

$$y(x_1) = a, y(x_2) = b$$

con $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Para este tipo de problemas es posible no tener ni existencia ni unicidad. Por ejemplo el problema

$$y'' + y = 0 \quad en \ (0, \pi)$$

sujeto a la condición $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ tiene como solución a

$$y(x) = C\sin(x)$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es cualquiera, es decir hay infinitas solucions. Mientras tanto, con las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, no hay solución.

0.2. **Principio de Superposición.** Para las ecuaciones lineales de segundo orden (0.1) de tipo *homogéneas*, es decir con $f \equiv 0$, se tiene la propiedad siguiente:

Si y_1 e y_2 son soluciones de (0.1), entonces para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la función $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ también es solución.

Con esto se tiene que el conjunto de las soluciones de una EDO (0.1) homogénea es un s.e.v. de las funciones dos veces derivables.

1. Dependencia e Independencia Lineal

Sean y_1 e y_2 dos funciones derivables. Se define el Wronskiano de y_1 e y_2 como

$$W(y_1, y_2)(t) = Det\Big(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \Big) = y_1 y_2' - y_2 y_1'. \tag{1.1}$$

El Wronskiano es una función de la variable t que se construye usando dos funciones y_1 e y_2 como datos. Esta función nos servirá para estudiar dependencia e independencia lineal de soluciones de EDO's de la forma (0.1).

Proposition 1.1. *Sean y_1 e y_2 soluciones de la EDO*

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0, \quad t \in I \subset \mathbb{R} \tag{1.2}$$

entonces $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$ satisface la EDO de primer orden

$$W'(t) = -pW(t). \tag{1.3}$$

La clave de esta Proposición es derivar la expresión de la defináción de W en (1.1) (obviamente con respecto a t) y después usar que y_1 e y_2 son soluciones de (1.2).

Con esta Propiedad se tiene la siguiente

Proposition 1.2. *Sean y_1 e y_2 soluciones de la EDO* (1.2) *y sea W el Wronskiano asociado a y_1 e y_2. Entonces, sólo una de las alternativas siguientes es cierta*

- *W es estrictamente positivo en I.*
- *W es estrictamente negativo en I.*
- *$W \equiv 0$ en I.*

Esta propiedad dice en particular que si el Wronskiano es cero en algún punto de I, entonces es cero en todos lados. La demostración sale de (1.3), que al ser una ecuación separable entrega como solución a

$$W(t) = Ce^{-P(t)}$$

donde P es una primitiva de p. Luego, si el Wronskiano es cero en algún punto $t_0 \in I$, entonces la constante C necesariamente es cero, anulando la expresión.

Universidad de Chile - Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Sección 2 - Semestre 2012-2.
Apunte de Clase 3: Método de Variación de Parámetros para EDO's de Orden n.
Prof. Erwin Topp; Aux. José Cereceda.

El método generaliza a lo hecho en el caso $n = 2$. Lo que queremos en encontrar una solución particular del problema

(0.1)
$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0 y(x) = r(x) \quad x \in (a,b)$$

donde las funciones $a_i, r : (a,b) \to \mathbb{R}$ son continuas para todo $i = 0, ..., n-1$. Además, supondremos conocidas $\{y_1, ...y_n\}$ n soluciones $l.i.$ de la ecuación homogénea asociada:

(0.2)
$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad x \in (a,b)$$

Al igual que en el caso de segundo orden, consideraremos una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación (0.1) de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + ... + v_n(x)y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)y_i(x)$$

donde las funciones v_i son derivables con derivada continua en (a,b). La idea es **imponer** que $y_p(x)$ sea solución de la ecuación (0.1). Derivando la expresión que define a $y_p(x)$ se obtiene

$$y_p'(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(x)y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x)y_i'(x),$$

pero como necesitaremos derivar nuevamente la expresión de $y_p(x)$ y no queremos que aparezcan segundas derivadas de v_i, impondremos que la suma que contiene primeras derivadas de v_i sea nula, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x)y_i(x) = v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) + ... + v_n'(x)y_n(x) = 0$$

Con esto, para la segunda derivada, se tendrá que

$$y_p''(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(x)y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x)y_i''(x),$$

y como antes, como al derivar por tercera vez no queremos que aparezcan segundas derivadas de v_i, imponemos que

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x)y_i'(x) = v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) + ... + v_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Así, procediendo de la misma forma hasta la $(n-1)$-ésima derivada de $y_p(x)$, se obtienen:

- n ecuaciones para las $(n-1)$ primeras derivadas de $y_p(x)$ (incluyendo la derivada de orden cero):

$$y_p^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)y_i^{(j)}(x), \quad j = 0, ..., (n-1). \tag{0.3}$$

- $(n-1)$ ecuaciones que se imponen para que no aparezcan derivadas de orden mayor de cada v_i (incluyendo la derivada de orden cero):

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x)y_i^{(j)}(x) = 0, \quad j = 0, ..., (n-2). \tag{0.4}$$

Al calcular la n-ésima derivada de $y_p(x)$ se obtiene:

$$y_p^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x)y_i^{(n)}(x).$$

Reemplazando esto último y las ecuaciones (0.3) en la ecuación (0.1) se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} v_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x)y_i^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y_i^{(j)}(x) = r(x) \\
\Rightarrow\ &\sum_{i=1}^{n} v_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x)y_i^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i(x)y_i^{(j)}(x)\Big) = r(x) \\
\Rightarrow\ &\sum_{i=1}^{n} \Big(v_i(x)y_i^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j v_i(x)y_i^{(j)}(x) + v_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)\Big) = r(x) \\
\Rightarrow\ &\sum_{i=1}^{n} \Big(v_i(x) \underbrace{\Big[y_i^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y_i^{(j)}(x)\Big]}_{=0, \text{ pues } y_i \text{ es solución de } (0.2)} + v_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)\Big) = r(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = r(x) \tag{0.5}$$

Al considerar las ecuaciones (0.4) y (0.5) se obtiene el siguiente sistema lineal que representa a las n ecuaciones que tienen como incógnitas a las derivadas de los v_i:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r \end{pmatrix}, \tag{0.6}$$

pero el sistema anterior tiene solución única, por que el determinante de la matriz de $n \times n$ considerada en el sistema no es más ni menos que el Wronskiano asociado a las soluciones y_i de la EDO homogénea. Como suponemos soluciones $l.i.$ este Wronskiano es no nulo, por lo que la matriz asociada es invertible. Usando la regla de Kramer (ver por ejemplo http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Cramer) es posible despejar cada función v_i como

$$v_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}$$

donde $W(x)$ es el Wronskiano asociado a las funciones $y_1, ..., y_n$ y $W_i(x)$ es el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & r & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Note que esta matriz no es más que la matriz asociada al Wronskiano, pero cambiando la $i-$ésima columna por el vector del lado derecho del sistema lineal (0.6).

Integrando, obtenemos finalmente que

$$v_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx.$$