Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento Ingeniería Matemática
Semestre otoño 2014

MA2601:ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
AUXILIAR # 6 - PRECONTROL
Profesor: Héctor Oliveros.
Auxiliares: Belen Barrios & José Cereceda.

Problemas.

P1 Resuelva las siguientes ecuaciones a coeficientes constantes:

a) $y^{(4)} + 3y'' - 4y = e^{-x} + x\cos(x)$
R: Para determinar la solución general de la ecuación, primero resolvemos la ecuación homogénea, para esto, escribimos la ecuación de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P(D)\,y &= D^4 y + 3D^2 y - 4y = 0 \\ &= \left(D^4 + 3D^2 - 4\right) y = 0 \\ &= \left(D^2 - 1\right)\left(D^2 + 4\right) y = 0 \\ &= (D-1)(D+1)\left(D^2+4\right) y = 0 \end{aligned}$$

luego dado que las raices de $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)\left(\lambda^2 + 4\right)$ son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = -2i$, lo que nos dice que

$$y_h = Ae^{-x} + Be^{x} + C\cos(2x) + D\sin(2x)$$

para determinar la solución general de la ecuación, utilizamos el método de polinomio anulador, notando que $Q(D) = (D+1)$ anula a e^{-x} y que $R(D) = \left(D^2+1\right)^2$ anula a $x\cos(x)$, luego aplicando el polinomio anulador a la ecuación inicial, se tiene que

$$\begin{aligned} (D+1)\left(D^2+1\right)^2 \{(D-1)(D+1)\left(D^2+4\right)\} y &= (D+1)\left(D^2+1\right)^2 \{e^{-x} + x\cos(x)\} \\ &= (D+1)\left(D^2+1\right)^2 \{e^{-}x\} + (D+1)\left(D^2+1\right)^2 \{x\cos(x)\} \\ &= \left(D^2+1\right)^2 (D+1) \{e^{-}x\} + (D+1)\left(D^2+1\right)^2 \{x\cos(x)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego la solución del problema original es de la forma

$$y = \underbrace{Ae^{-x} + Be^{x} + C\cos(2x) + D\sin(2x)}_{y_h} + \underbrace{Exe^{-x} + F\cos(x) + G\sin(x) + Hx\cos(x) + Ix\sin(x)}_{y_p}$$

con A, B, C, D constantes libres, y E, F, G, H, I tales que

$$\begin{aligned} P(D)\left(Exe^{-x} + F\cos(x) + G\sin(x) + Hx\cos(x) + Ix\sin(x)\right)) &= e^{-x} + x\cos(x) \\ (D-1)(D+1)\left(D^2+4\right)\left(Exe^{-x} + F\cos(x) + G\sin(x) + Hx\cos(x) + Ix\sin(x)\right)) &= e^{-x} + x\cos(x) \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir (luego de derivar muchas veces) que $E = \frac{-1}{10}$, $H = 1$ y $F = G = I = 0$.