

**MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias****Profesor:** Héctor Olivero**Auxiliar:** José Cereceda, Belén Barrios**Otoño 2014**

Pauta Auxiliar # 1

Problema 1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $y' + y^2 \sin x = 0$

(b) $y' + xy = \frac{x}{y^3}$ # Op1: V.S Op2: Bernoulli

(c) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$

(d) $y' = x^2 + \frac{3}{2x}y - \frac{1}{x}y^2$

(e) $xy' = x + y$ # Opción 1: Homogénea Opción 2: V.S.

(f) $yy'' = (y')^2$ *Indicación* : Puede serle útil el cambio de variables $p = y'$

(g) $x^3y' + x^2y = 2y^{-4/3}$

Solución: Se dejarán indicados los cambios de variable para cada ecuación, debido a que fueron resueltas en clase auxiliar.

(a) Variable separable.

Sol:

$$y(x) = \frac{1}{C - \cos(x)}; \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) Bernoulli, $z = y^4$, o también se puede resolver por variables separables.

Se tiene

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x}{y^3} - xy \\ &= x\left(\frac{1}{y^3} - y\right) \end{aligned}$$

Ahora sí podemos separar las variables,

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\left(\frac{1-y^4}{y^3}\right)} &= x \\ \Leftrightarrow y' \frac{y^3}{1-y^4} &= x \end{aligned}$$

Integrando con respecto a x :

$$\int \frac{y^3}{1-y^4} \frac{dy}{dx} dx = \int x dx.$$

Aquí parece tentativo "simplicar" los dx del lado izquierdo. Recordar que lo se hace es utilizar la regla de la cadena, que viene del cambio de variable:

$$u = y \Rightarrow du = y' dx$$

Entonces nos queda:

$$\int \frac{u^3}{1-u^4} du = \int x dx$$

Continuando, resolvemos la integral haciendo el cambio

$$v = (1 - u^4) \Rightarrow dv = -4u^3 du$$

Nos queda

$$-\frac{1}{4} \int \frac{dv}{v} = \int x dx$$

Volviendo a la variable original

$$\frac{1}{2} \ln |1 - y^4| = x^2 + \mathbb{k}, \quad \mathbb{k} \in \mathbb{R}$$

Despejando y

$$\begin{aligned} \ln |1 - y^4| &= -2x^2 - 2\mathbb{k} \\ 1 - y^4 &= e^{-2x^2} e^{2\mathbb{k}} \end{aligned}$$

Renombrando $e^{2\mathbb{k}} = \mathbf{C}$ con $\mathbf{C} \in \mathbb{R}$, queda que

$$\begin{aligned} y(x) &= (1 - \mathbf{C}e^{-2x^2})^{1/4} \\ &= (1 + \mathbf{C}'e^{-2x^2})^{1/4} \end{aligned}$$

Con $\mathbf{C} = -\mathbf{C}'$

(c) Ricatti, con $y_p = 1/x$ usar el cambio $y = y_p + \frac{1}{z}$

Sol: Utilizando el cambio mencionado se llegará a la solución para z :

$$z(x) = -\frac{x}{3} + \frac{\mathbf{C}}{x^2}$$

De donde se despeja $y(x)$ recordando que $y = y_p + \frac{1}{z}$

(d) Utilizando el cambio de variable típico de la ecuación de Ricatti, consideramos

$$\begin{aligned} y_p &= x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow y'_p &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Probando esta solución particular en la EDO, buscamos calcular el valor de α .

$$\begin{aligned} \alpha x^{\alpha-1} &= x^2 + \frac{3}{2}x^{\alpha-1} - x^{2\alpha-1} \\ 0 &= x^2 - x^{2\alpha-1} + \left(\frac{3}{2} - \alpha\right)x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Notamos aquí que con $\alpha = \frac{3}{2}$ se cumple la igualdad.

$$\Rightarrow y_p = x^{3/2} \text{ es solución.}$$

Así, consideremos

$$y = x^{3/2} + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{z'}{z^2}$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{z'}{z^2} &= x^2 + \frac{3}{2}x(x^{3/2} + \frac{1}{z}) - \frac{1}{x}(x^{3/2} + \frac{1}{z})^2 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{z'}{z^2} &= x^2 + \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{3}{2xz} - x^2 - \frac{2x^{1/2}}{z} - \frac{1}{xz^2} \end{aligned}$$

Acomodando

$$\begin{aligned} \Rightarrow z' &= -\frac{3}{2x}z + 2x^{1/2}z + \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow z' + \left(\frac{3}{2x} - 2x^{1/2}\right)z &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Llamaremos a $\frac{3}{2x} - 2x^{1/2} = a(x)$, luego resolviendo por factor integrante, con $\mu(x) = e^{\int a(x)dx}$ se obtiene

$$\begin{aligned} z(x)x^{3/2}e^{-\frac{4}{3}x^{3/2}} &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}x^{3/2}} + \mathbf{C}; \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow z(x) &= -\frac{1}{2}x^{-3/2} + \mathbf{C}x^{-3/2}e^{\frac{4}{3}x^{3/2}} \end{aligned}$$

Finalmente, basta recordar que $y = x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{z}$ y se obtiene $y(x)$.

(e) Resolver directamente con factor integrante, o usar el cambio de variable $z = \frac{y}{x}$

Sol:

$$y(x) = x \ln |x| + \mathbf{C}x; \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}$$

(f) Usando la indicación, se hace el cambio $y'' = p \frac{dp}{dy}$

Sol:

$$y(x) = e^{\mathbf{C}x + \mathbf{K}}; \quad \mathbf{C}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}$$

(g) Bernoulli, con $z = y^{\frac{7}{3}}$

Sol:

$$y(x) = \left(14x^{-2} + \mathbf{C}x^{-7/3}\right)^{3/7}; \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}$$

Problema 2

Modelamiento: Capitalización continua del interés

El interés que gana una cuenta de ahorros, a menudo se *capitaliza o se compone* trimestralmente o hasta mensualmente. No hay razón para detenerse en esos intervalos; el interés también podría componerse cada día, hora, minuto, segundo, medio segundo, etc; es decir, se podría componer **continuamente**. Para modelar el concepto de la composición continua del interés supongamos que $S(t)$ es la cantidad de dinero acumulada en la cuenta de ahorros al cabo de t años, y que r es la tasa de interés anual, compuesto continuamente. Si $h > 0$ representa un incremento en el tiempo, el interés que se obtiene en el intervalo $(t+h) - t$ es igual a la diferencia entre las cantidades acumuladas:

$$S(t+h) - S(t) \quad (1)$$

Dado que el interés está definido por (*tasa*) $\times$ (*tiempo*) $\times$ (*capital inicial*), podemos determinar el interés ganado en ese mismo intervalo mediante

$$rhS(t) \quad (2)$$

o también mediante,

$$rhS(t+h) \quad (3)$$

Vemos intuitivamente que las cantidades en (2) y (3) son las cotas inferior y superior respectivamente, del interés real en la expresión (1); esto es,

$$rhS(t) \leq S(t+h) - S(t) \leq rhS(t+h)$$

o sea

$$rS(t) \leq \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \leq rS(t+h). \quad (4)$$

Como queremos que h sea cada vez menos, podemos tomar el límite de (4) cuando $h \rightarrow 0$:

$$rS(t) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \leq rS(t)$$

Y de este modo se debe cumplir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = rS(t) \quad (5)$$

o en otras palabras

$$\frac{dS}{dt} = rS \quad (6)$$

Lo esencial de haber escrito la ecuación (6) es:

Una sola ecuación diferencial puede ser modelo matemático de muchos fenómenos distintos.

Con frecuencia, los modelos matemáticos se acompañan de condiciones definitorias; por ejemplo, en la ecuación (6) cabría esperar conocer una población inicial, P_0 , una cantidad inicial de sustancia A_0 disponible, y un saldo inicial S_0 respectivamente. Si el tiempo inicial se define como $t = 0$, sabemos que $P(0) = P_0$, $A(0) = A_0$ y que $S(0) = S_0$.

En otras palabras, un modelo matemático está formado por un problema de valor inicial, o también por un problema de valores en la frontera.

Problema 3. El siguiente es un modelo para la venta esperada de un nuevo teléfono celular:

$$y' = (P_0 - y)(f(t) + \sigma(t)y),$$

donde P_0 (constante) representa la población total de compradores potenciales, y , el número de personas que compra el nuevo teléfono, σ el coeficiente de compra por imitación y f los estímulos publicitarios.

1. Encuentre una solución **constante** evidente de la ecuación. Reduzca la ecuación a una más simple haciendo un cambio de variables adecuado.

Solución

Trivialmente $y(t) = P_0$ es la solución constante. Hagamos el c.v. $y = P_0 + 1/z$. Entonces $y' = -z'/z^2$, con lo que la ecuación se transforma en

$$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{z} \left(f(t) + P_0 \sigma(t) + \frac{\sigma(t)}{z} \right),$$

de donde

$$z'(t) - (f(t) + P_0 \sigma(t))z(t) = \sigma(t).$$

2. Dé la forma general de la solución $y(t)$.

Solución

La ecuación para z es fácil de resolver, basta multiplicar por el factor integrante $\exp \left(- \int f(s) + P_0 \sigma(s) ds \right)$ y luego integrar para obtener:

$$\begin{aligned} z(t) = \exp \left(\int f(t) + P_0 \sigma(t) ds \right) \int \exp \left(- \int f(s) + P_0 \sigma(s) ds \right) \sigma(t) dt \\ + C \exp \left(\int f(t) + P_0 \sigma(t) ds \right), \end{aligned}$$

de donde y se despeja fácilmente.

3. Calcule la solución explícitamente si $f(t) = at$, $\sigma(t) = bt$, $a, b > 0$.

Solución

Notemos que en este caso

$$\int f(s) + P_0 \sigma(s) ds = \int (a + P_0 b) s ds = (a + P_0 b) \frac{s^2}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} z(t) = \exp \left((a + P_0 b) \frac{t^2}{2} \right) \int \exp \left(-(a + P_0 b) \frac{t^2}{2} \right) b t dt \\ + C \exp \left((a + P_0 b) \frac{t^2}{2} \right), \end{aligned}$$

pero

$$\int \exp \left(-(a + P_0 b) \frac{t^2}{2} \right) b t dt = -\frac{b}{a + P_0 b} \exp \left(-(a + P_0 b) \frac{t^2}{2} \right),$$

y entonces

$$z(t) = -\frac{b}{a + P_0 b} + C \exp \left((a + P_0 b) \frac{t^2}{2} \right),$$

de donde

$$y(t) = \frac{C \exp \left((a + P_0 b) \frac{t^2}{2} \right) P_0 (a + P_0 b) + a}{C \exp \left((a + P_0 b) \frac{t^2}{2} \right) (a + P_0 b) - b}.$$

4. En el caso anterior, si además $y(0) = 0$, evalúe la constante indeterminada y determine el tiempo para que la mitad de la población potencial haya comprado el nuevo teléfono.

Solución

$$y(0) = \frac{CP_0(a + P_0b) + a}{C(a + P_0b) - b} = 0 \implies C = \frac{-a}{P_0(a + P_0b)}.$$

Entonces:

$$y(t) = P_0 \frac{a \exp\left((a + P_0b)\frac{t^2}{2}\right) - a}{a \exp\left((a + P_0b)\frac{t^2}{2}\right) + P_0b}.$$

Buscamos t tal que $y(t) = P_0/2$, es decir buscamos t tal que

$$\frac{P_0}{2} = P_0 \frac{a \exp\left((a + P_0b)\frac{t^2}{2}\right) - a}{a \exp\left((a + P_0b)\frac{t^2}{2}\right) + P_0b},$$

Luego

$$a \exp\left((a + P_0b)\frac{t^2}{2}\right) + P_0b = 2a \exp\left((a + P_0b)\frac{t^2}{2}\right) - 2a,$$

de donde

$$\exp\left((a + P_0b)\frac{t^2}{2}\right) = 2 + P_0\frac{b}{a},$$

finalmente

$$t = \sqrt{\frac{2}{(a + P_0b)} \ln\left(2 + P_0\frac{b}{a}\right)}.$$