



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables Clase Auxiliar 13 - Función Inversa e Implícita

4 de julio de 2014

Problema 1 [Sistema no Lineal].- Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\4x + 3y + z + u^2 + v &= -w - 2 \\x + z + w + 2 &= -u^2\end{aligned}$$

1. Demuestre que se pueden expresar las variables u, v, w en función de x, y, z en una vecindad apropiada del punto $(x, y, z, u, v, w) = (0, 0, 0, 0, 0, -2)$.
2. Obtenga $\frac{\partial u}{\partial x}(\vec{0}), \frac{\partial v}{\partial x}(\vec{0}), \frac{\partial w}{\partial x}(\vec{0})$.

Problema 2 [Hipótesis].- Sea $f(x_1, x_2) := (e^{x_1} \cos(x_2), e^{x_1} \sin(x_2))$

1. Demuestre que f no admite inversa en \mathbb{R}^2 .
2. Demuestre que f cumple todas las hipótesis del teorema de la función inversa. Discuta sobre la parte anterior.
3. Defina localmente la inversa en el punto $x_0 = (0, 0)$. Calcule $(f^{-1})'(y_0)$ donde $y_0 := f(x_0)$.

Problema 3 [Función Inversa].- Sean $\phi, \theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y considere

$$f(x_1, x_2) := (x_1 + x_1^2 \phi(x_1, x_2), x_2 + x_2^2 \theta(x_1, x_2))$$

1. Demuestre que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$
2. Calcule $f'(x_1, x_2)$.
3. Demuestre que $\exists U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos que contienen a $(0, 0)$ y tales que $f : U \rightarrow V$ es biyectiva con inversa diferenciable.

Problema 3 [Continuidad].- Considere la función $f(x, y) := \frac{\sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{y}{2}) - \cos(\frac{x}{2}) \sin(\frac{y}{2})}{x-y} + \sqrt{xy}$

1. Establezca el dominio de f , bosqueje.
2. Considere

$$f_\alpha := \begin{cases} f & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determine α tal que f_α sea continua en el origen.

3. Trabaje con α de la parte anterior. Sea D el conjunto descrito por $y - \frac{x}{2} \leq 0$ y bajo la curva $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ en el primer cuadrante. Demuestre que f_α alcanza mínimo y máximo en D .

Problema 4 [Dominio y Codominio].- Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1(U)$, sea $a \in U$. Si $f'(a)$ es invertible, muestre que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(f(B(a, r)))}{\text{vol}(B(a, r))} = |f'(a)|$$