Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Clase Auxiliar 12 - Repaso Control 3

16 de junio de 2014

Problema 1 [Volumenes].-

1. Considere el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ donde $a, b, c > 0$. Calcule el volumen de la región encerrada por el elipsoide.

2. Calcule el volumen encerrado por el cono parabólico $x^2 + y^2 = z^2$ y por la bola $B(0, r)$ con $r > 0$.

3. Considere dos cilindros sólidos en $\mathbb{R}^3$ dados por $C_1 := \{\vec{x} | x_1^2 + x_3^2 \leq R\}$ y $C_2 := \{\vec{x} | x_2^2 + x_3^2 \leq R\}$ donde $R > 0$. Obtenga el volumen de $C := C_1 \cap C_2$.

4. Sea el toroide A de radios R y a donde $0 < a < R$. Calcule el volumen de A.

5. Sea C el cilindro mazizo de ecuación $x^2 + y^2 \leq (R + \varepsilon)^2$, donde $0 < \varepsilon < a$. Exprese el volumen de $A \setminus C$, con A de la parte anterior.

Problema 2 [Optimización Restricta].-

1. Maximizar el volumen del paralelepipedo de superficie $6[m^2]$.

2. Encuentre el área máxima de un rectángulo, con lados paralelos a los ejes, inscrito en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Problema 3 [Cambio de Variables].- Use la transformación definida por $u = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{2y}{x^2+y^2}$ para evaluar

$$\int\int_R \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^2}$$

donde R es la región en el primer cuadrante del plano $x-y$ delimitada por los círculos $x^2+y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8y$ y $x^2 + y^2 = 2y$.