Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Clase Auxiliar 11 - Integrales Múltiples

9 de junio de 2014

Problema 1 [Volumenes].-

1. Considere el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ donde $a,b,c>0$. Calcule el volumen de la región encerrada por el elipsoide.

2. Calcule el volumen encerrado por el cono parabólico $x^2+y^2=z^2$ y por la bola $B(0,r)$ con $r>0$.

3. Considere dos cilindros sólidos en $\mathbb{R}^3$ dados por $C_1:=\{\vec{x}|x_1^2+x_3^2\leq R\}$ y $C_2:=\{\vec{x}|x_2^2+x_3^2\leq R\}$ donde $R>0$. Obtenga el volumen de $C:=C_1\cap C_2$.

4. Sea el toroide A de radios R y a donde $0<a<R$. Calcule el volumen de A.

5. Sea C el cilindro mazizo de ecuación $x^2+y^2\leq(R+\varepsilon)^2$, donde $0<\varepsilon<a$. Exprese el volumen de $A\setminus C$, con A de la parte anterior.

Problema 2 [Cambio de Variables].-

1. Calcule la masa y el momento de inercia del anillo en $\mathbb{R}^2$ comprendido entre las bolas $B(0,a)$ y $B(0,b)$ con $a<b$ y de densidad $\rho(x,y)=x$.

2. Use la transformación definida por $u=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $v=\frac{2y}{x^2+y^2}$ para evaluar
$$\int\int_R \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$$
donde R es la región en el primer cuadrante del plano $x-y$ delimitada por los círculos $x^2+y^2=6x$, $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8y$ y $x^2+y^2=2y$.

Problema 3 [Cálculo de Integrales Iteradas].- Para los siguietes casos calcular las integrales

1. $$\int_0^1\int_{x_2}^1 \cos(x_1^2)dx_1dx_2$$

2. $$\int_0^\infty\int_{\sqrt[3]{x_1}}^2 \frac{1}{1+x_2^4}dx_2dx_1$$

Problema 4 [Distribución Normal].- Sean $\sigma>0$ y $\mu\in\mathbb{R}$. Considere las funciones reales $f(x_i):=k\exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$. Obtenga el valor de k tal que
$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(\vec{x})d\vec{x}=1 \quad \text{donde} \quad f_n(\vec{x}):=\prod_{i=1}^n f(x_i)$$
Puede ser útil calcular primero la integral de $\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy$.