Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Clase Auxiliar 10 - Integrales Múltiples

2 de junio de 2014

Problema 1 [Volumenes].-

1. Considere el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ donde $a, b, c > 0$. Calcule el volumen de la región encerrada por el elipsoide.

2. Considere un cuadrado de lado $2l > 0$ centrado en el origen. Sea la región de $\mathbb{R}^3$ comprendida entre el cuadrado y la función $x^2|y|$. Obtenga el volumen de la región descrita cerciorando que está bien definido.

3. Separe el cuadrado de la parte anterior en dos triangulos adyacentes en la diagonal $y = x$, exprese el volumen de la región anterior en base a estos dos nuevos conjuntos.

Problema 2 [Regiones de Integración].- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función R.I. en todo $\mathbb{R}^2$. Se pide representar la región de integración e invertir el orden de las integrales para:

1. $$\int_0^1 \int_{1-x_1}^{\sqrt{1-x_1^2}} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

2. $$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{x_2}^{\sqrt{4-x_2^2}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Problema 3 [Cálculo de Integrales Iteradas].- Para los siguietes casos calcular las integrales (si es que existen).

1. $$\int_0^{\pi} \int_{x_1}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x_2)}{x_2} dx_2 dx_1$$

2. $$\int_0^1 \int_{x_2}^1 \cos(x_1^2) dx_1 dx_2$$

3. $$\int_0^{\infty} \int_{\sqrt[3]{x_1}}^2 \frac{1}{1 + x_2^4} dx_2 dx_1$$

Nota: Es sabido que las funciones anteriores no poseen primitiva explícita.

Problema 4 [Integral Nula].- Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ rectángulo con $V(R) > 0$. Sea $f : R \to \mathbb{R}$ continua tal que para toda función $g : R \to \mathbb{R}$ continua $\int_R fg = 0$. Muestre que $f = 0$.