Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Clase Auxiliar 8 - Repaso Control 2

12 de mayo de 2014

Problema 1 [Regla de la Cadena].- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, muestre que si se satisface $(f(x)+g(y))^2 e^{z(x,y)} = 2f'(x)g'(y)$ cuando $f(x) + g(y) \neq 0$, entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \neq 0 \ \forall \, x, y$.

2. Se tiene la función v de forma implícita mediante $v = F(x+v, y \cdot v)$. Determine las derivadas parciales $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ en función de las derivadas parciales de F. Calcule para el caso particular que $F := \exp(x + v) + \operatorname{sen}(y \cdot v)$.

3. Muestre que bajo el cambio de variables $x = 2s+t$, $y = s-t$ la expresión $5\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ se puede escribir como $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

Problema 2 [Optimización Irrestricta].-

1. Encuentre máximos y mínimos de $f(x, y) = (x^2 + y^3 - 3xy)^3$

2. Considere $g(x_1, x_2) := (x_1 - 2)^2 - (x_2 + 1)^2$. Demuestre que el punto $(2, -1)$ es del tipo "punto silla".

3. Muestre que $x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2 + 1 \geq 0 \ \forall \, x, y$

Problema 3 [Un Resultado Útil].- Asuma el siguiente resultado: si $Q(x)$ y $P(x)$ son dos polinomios de grado k en $x_1, \cdots, x_n$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{Q(x) - P(x)}{x} = 0 \Rightarrow Q = P$$

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{C}^3$, muestre que si Q es un polinomio de grado 2 tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x-a)}{|x-a|^2} = 0$$

entonces Q es el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en a.

2. Si $Q(x)$ y $P(x)$ son el desarrollo de Taylor de orden 2 de f y g respectivamente, exhiba el desarrollo de orden 2 de $h(x) := f(x)g(x)$

3. Encuentre el desarrollo de Taylor de orden 2 de $f(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen}(x + y)$ en $x = 0, y = 0$.

Problema 4 [Funciones Ponderadas].- Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y tal que $f(0) = 0$, suponga que $\exists \, c \in \mathbb{R}$ tal que $g'(x) = cf'(x)$

1. Muestre que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \; |g(x) - g(0)| \leq |c||f(x)|$.

2. Sea $x^\star$ máximo global de f, clasifique $x^\star$ para la función g.

Problema 5 [Desarrollos Limitados].-

1. Sea $g(x_1, x_2) := \text{sen}(x_1)\sqrt{x_2}$. Encuentre un polinomio de grado 2 en torno a $(0,0)$

2. Sea $f(x,y) = e^{x+y}$, exprese el polinomio $P(x,y)$ de orden 2 en torno a $(0,0)$ y dé una cota para el error en el caso en que $||(x,y)|| \leq \frac{1}{2}$

3. Se requiere un polinomio de grado 2 que aproxime $f(x_1,x_2) := x_1^2 - x_2^2 + \ln(x_1^2 + (x_2+1)^2)$ en la vecindad de $(1,-1)$.

Problema 6 [Función Homogenea].- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogenea de grado m, es decir $f(tx) = t^m f(x)\; \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

1. Muestre que si f es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces las derivadas parciales de f son homogéneas de grado $m-1$.

2. Muestre que si f es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ se cumple $mf(x) = \nabla f(x)$.

3. Muestre que si f es de clase $\mathcal{C}^2$, entonces $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ se cumple $m(m-1)f(x) = x^t f''(x) x$.

Problema 7 [Parametrización].- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para cada x defina $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_x(y) = f(x,y)$. Suponga que para cada x existe un único y tal que $g_x'(y) = 0$. Si se denota por $c(x)$ a tal punto y y se supone que la función c es diferenciable. Demostrar:

1. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \neq 0$ para todo (x,y) entonces:

$$c'(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, c(x))}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, c(x))}$$

2. Si $c'(x) = 0$, entonces existe un $\bar{y}$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \bar{y}) = 0 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) = 0$$

Problema 8 [Resultados Teóricos].-

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, muestre que si $x^\star \in \mathbb{R}^n$ es tal que $\nabla f(x^\star) \neq 0$, entonces existen $h, \varepsilon > 0$ tales que $f(x^\star + h\nabla f(x^\star)) > f(x^\star) + \varepsilon$.

2. Muestre que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y tal que $\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = 0$ y $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces f tiene máximo global.

Problema 9 [Restricción a Curva].- Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que satisface $\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau} + u\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x} = 0$ en una curva suave de τ, esto es, existe una función diferenciable tal que $x = x(\tau)$. Pruebe que si $\frac{dx(\tau)}{d\tau} = u(\tau, x(\tau))$ entonces $u(\tau, x(\tau))$ es constante.