Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Clase Auxiliar 7 - Optimización

5 de mayo de 2014

Problema 1 [Regla de la Cadena].- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$

1. Definamos $x = s + t$ e $y = s - t$ para obtener la función $g(s,t) = f(s+t, s-t)$. Muestre que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}$$
2. Muestre que bajo el cambio de variables $x = 2s + t$, $y = s - t$ la expresión $5\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ se puede escribir como $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

Problema 2 [Clasificación de Puntos Críticos].- Discuta la naturaleza de los puntos críticos

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$
2. $f(x,y) = x^4 + y^4$
3. $f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$

Problema 3 [Optimización Irrestricta].- Encuentre máximos y mínimos de

1. $f(x,y) = \ln(1 + x^2 - 2xy + y^2)$
2. $f(x,y) = (x^2 + y^3 - 3xy)^3$

Problema 4 [Un Resultado Útil].- Asuma el siguiente resultado: si $Q(x)$ y $P(x)$ son dos polinomios de grado k en $x_1, \cdots, x_n$, entonces
$$\lim_{x \to 0} \frac{Q(x) - P(x)}{x} = 0 \Rightarrow Q = P$$

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{C}^3$, muestre que si Q es un polinomio de grado 2 tal que
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x-a)}{|x-a|^2} = 0$$
entonces Q es el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en a.
2. Si $Q(x)$ y $P(x)$ son el desarrollo de Taylor de orden 2 de f y g respectivamente, exhiba el desarrollo de orden 2 de $h(x) := f(x)g(x)$
3. Encuentre el desarrollo de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = e^{x+y}\operatorname{sen}(x+y)$ en $x = 0, y = 0$.

Problema 5 [Restricción a Curva].- Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que satisface $\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau} + u\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x} = 0$ en una curva suave de τ, esto es, existe una función diferenciable tal que $x = x(\tau)$. Pruebe que si $\frac{dx(\tau)}{d\tau} = u(\tau, x(\tau))$ entonces $u(\tau, x(\tau))$ es constante.