Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Clase Auxiliar 6 - Derivadas de Orden Superior

28 de abril de 2014

Problema 1 [Regla de la Cadena].-

1. Sea $f(u,v) = g(uv, \frac{u^2-v^2}{2})$ donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Demuestre que se cumple

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 = (u^2+v^2)\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2\right)$$

Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciables. Considere $z(u,v) = \exp(f^2(u,v)g(u,v))$

2. Determine $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$.
3. Use ahora $f = \sqrt{uv}, g = \frac{1}{v}$. Obtenga explícitamente z, calcule las derivadas parciales y compare con la parte anterior.

Problema 2 [Desarrollos de Taylor].- Encuentre el desarrollo de segundo orden

1. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$.
2. $f(x,y) = \ln(1+x+y) + x^3 + y^2$ en $x = 0, y = 0$.

Problema 3 [Ecuación de Laplace].- Definimos el cambio a coordenadas polares mediante la función $T(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))^t$. Muestre que bajo este cambio de variables la ecuación $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f = 0$ se escribe como

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}f + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}f + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}f$$

Problema 4 [Un Resultado Útil].- Asuma el siguiente resultado: si $Q(x)$ y $P(x)$ son dos polinomios de grado k en $x_1, \cdots, x_n$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{Q(x)-P(x)}{x} = 0 \Rightarrow Q = P$$

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{C}^3$, muestre que si Q es un polinomio de grado 2 tal que
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-Q(x-a)}{|x-a|^2} = 0$$
entonces Q es el desarrollo de Taylor de f de orden 2 en a.
2. Si $Q(x)$ y $P(x)$ son el desarrollo de Taylor de orden 2 de f y g respectivamente, exhiba el desarrollo de orden 2 de $h(x) := f(x)g(x)$
3. Encuentre el desarrollo de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = e^{x+y}\operatorname{sen}(x+y)$.

Problema 5 [Restricción a Curva].- Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que satisface $\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau} + u\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x} = 0$ en una curva suave de τ, esto es, existe una función diferenciable tal que $x = x(\tau)$. Pruebe que si $\frac{dx(\tau)}{d\tau} = u(\tau, x(\tau))$ entonces $u(\tau, x(\tau))$ es constante.