Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Clase Auxiliar 5 - Repaso Para Control 1

14 de abril de 2014

Problema 1 [Convexidad].- Un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexo si cumple que

$$\forall\, x, y \in \Omega \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$$

1. Muestre que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces $Int(\Omega)$ y $Adh(\Omega)$ son convexos.

2. Muestre que las bolas abiertas y cerradas de $\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos.

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con Ω un conjunto convexo. Definimos el epigrafo de f como

$$epi(f) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, f(x) \leq t\}$$

3. Muestre que $epi(f)$ es convexo ssi $\forall\, x, y \in \Omega, \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. A las funciones que cumplen esta propiedad les llamamos convexas.

4. Suponga que f es diferenciable. Muestre que si f es convexa entonces $\forall\, x, y \in \Omega$ $f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)'(y-x)$.

   Indicación: Defina una función $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ adecuada y use que en $\mathbb{R}$ las funciones convexas cumplen $\phi(t_2) \leq \phi(t_1) + \phi'(t_1)(t_2 - t_1)$.

Problema 2 [Algunos Resultados Teóricos].-

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Muestre que si $f(0) = 0$ y es homogénea, i.e. $f(tx) = tf(x)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(x) = \nabla f(0) \cdot x$

2. Pruebe que una función homogenea que no es lineal no puede ser diferenciable en el origen. Dé un ejemplo de tal función.

3. Muestre que si una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable es tal que $Df(x) = 0$ $\forall\, x$, entonces f es constante.

Problema 3 [Hiperplanos].-

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ el plano tangente al grafo de f en x tiene a $\nabla f(x)$ como vector normal.

2. Halle la ecuación del plano tangente a la superficie dada por $z = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto $(1, 2, -3)$.

3. Considere el elipsoide $x^2 b^2 + y^2 a^2 = 1 - z^2 (ab)^2$. Proponga como encontrar el plano tangente en el punto $(0, 0, 1)$. Grafique.