Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Clase Auxiliar 4 - Continuidad y Derivadas Parciales

7 de abril de 2014

Problema 1 [Derivadas Parciales].-

1. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal dada. Encuentre las derivadas parciales de $f(x) := x \cdot T(x)$.

2. Sea $f(x, y) = xy$, muestre que la dirección del gradiente de f es siempre perpendicular a las curvas de nivel de f.

3. Encuentre la derivada de la función definida por $f(x) = ||x||$

Problema 2 [Algunos Resultados Teóricos].-

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Muestre que si $f(0) = 0$ y es homogénea, i.e. $f(tx) = tf(x)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(x) = \nabla f(0) \cdot x$

2. Pruebe que una función homogenea que no es lineal no puede ser diferenciable en el origen. Dé un ejemplo de h.

3. Muestre que si una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable es tal que $Df(x) = 0 \;\forall\, x$, entonces f es constante.

Problema 3 [Continuidad de Derivadas].- Pruebe por definición que las derivadas parciales de f existen $\forall x \in \mathbb{R}^2$, pero no son continuas, donde:

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

Problema 4 [Análisis de Diferenciabilidad].- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) & \text{si } \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

1. Calcule $\nabla f(0, 0)$.

2. Pruebe por definición que f es diferenciable en 0.

3. ¿Son sus derivadas parciales continuas?

Problema 5 [Hiperplanos].-

1. Halle la ecuación del plano tangente a la superficie dada por $z = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto $(1, 2, -3)$.

2. Considere el elipsoide $x^2 b^2 + y^2 a^2 = 1 - z^2 (ab)^2$. Proponga como encontrar el plano tangente en el punto $(0, 0, 1)$. Grafique.