Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables
Clase Auxiliar 3 - Continuidad y Derivadas Parciales

31 de marzo de 2014

Problema 1 [Topología].-

1. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos la esfera $S(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x|| = r\}$. Muestre que $\partial B(x,r) = S(x,r)$.
2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, muestre que ∂A es un conjunto cerrado.
3. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pruebe que si $\forall\, b, c \in \mathbb{R}$ el conjunto $S := \{x \in D : b < f(x) < c\}$ es abierto (relativo a D), entonces f es continua.
4. Exhiba la adherencia del conjunto $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall\, i = 1, ..., n\ x_i = \frac{1}{n_i}$ para algún $n_i \in \mathbb{N}\}$.

Problema 2 [Preimágenes de Continuas].- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, muestre que

1. f es continua ssi para todo $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto se tiene que $f^{-1}(A)$ es abierto.
2. f es continua ssi para todo $C \subseteq \mathbb{R}^m$ cerrado se tiene que $f^{-1}(C)$ es cerrado.
3. Use la función $g(x,y) = x^2$ para mostrar que no necesariamente $g(A)$ es abierto si A es abierto, aunque g sea continua.
4. Suponga $m = 1$, concluya que los conjuntos $\{x : f(x) > c\}$ son abiertos y los conjuntos $\{x : f(x) = c\}$ son cerrados $\forall\, c \in \mathbb{R}$

   Nota: Esto explica que los conjuntos del estilo $\{(x,y) : x^2 + y > 1\}$ son abiertos y los conjuntos como $\{(x,y) : x^3 y = 2\}$ son cerrados.

Problema 3 [Derivadas Direccionales].- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y para $v \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

1. Muestre que si $w, v \in \mathbb{R}^n$ son colineales, entonces $D_v f(x)$ y $D_w f(x)$ son colineales.
2. Defina $\mathcal{L} := \{D_v f(x) : v \in \mathbb{R}^n\}$, pruebe que si $L(v) := D_v f(x)$ es lineal, entonces $\mathcal{L}$ es subespacio de $\mathbb{R}^m$.
3. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal dada. Encuentre $D_v f(x)$ donde $f(x) = x \cdot T(x)$.

Problema 4 [Implicaciones de Continuidad].- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1. Muestre que si f es continua entonces $Gr(f)$ es un conjunto cerrado.
2. Sea $F : \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \to \mathbb{R}$ continua, defina $m := \max_{|x| \leq 1} \min_{|y| \leq 1} F(x,y)$ y $M := \min_{|y| \leq 1} \max_{|x| \leq 1} F(x,y)$, muestre que $M \geq m$.