



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Profesor: Alejandro Jofré
Prof. Auxiliar: Alberto Vera Azócar

Cálculo en Varias Variables Topología y Convergencia

24 de marzo de 2014

Problema 1 [Topología].-

1. Entender la diferencia entre adherencia y derivado.
2. Muestre que la unión cualquiera de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
3. Muestre que la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
4. Verifique que en \mathbb{R}^n los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el espacio entero.
5. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, muestre que $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.
6. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, muestre que $\text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$.
7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, pruebe que $\text{adh}(A^c) = \text{int}(A)^c$

Problema 2 [Dominios irregulares].-

 Considere la función definida por

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Encuentre $\text{dom}(f)$, bosqueje.
2. Determine curvas de nivel de f .
3. ¿Es f continua en 0?

Problema 3 [Continuidad].-

 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudie $\text{dom}(f)$ y su continuidad.

Indicación: Puede usar que $\exists m, M > 0$ tales que $m\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq M\|\vec{x}\|_\infty$.

Problema 4 [Funciones lineales].- Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal. Demuestre que h es continua ssi h es continua en 0.

Problema 5 [Grafo Cerrado].- Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, muestre que f es continua ssi $\text{Gr}(f)$ es un conjunto cerrado.